منطق الخوارزمي في

في الفصل الصيفي للعام الدراسي 1957 – 1958 حضرت محاضرات الاستاذ الدكتور هانس هرمس (Hans Hermes) رئيس معهد المنطق الرياضي في جامعة مونستر Munster بالمانيا الغربية كطالب دكتوراه ، وكان موضوع الدراسة « مدخل الى المنطق الرياضي » وبعد محاضرات عديدة تناول فيها حساب القضايا (Amssagen Kalkul) والعناصر المنطقية المشتركة انتقل الى تحليل حساب المحولات (Pradikaten Kalkul) او حساب دالات القضايا (Functions Propositional) (1) ، فاذا به يطرح مقدمة يتناول فيها الاصول التاريخية لموضوع البحث فيذكر اسم الخوارزمي في المحاضرة ، وهنا التفت الي لمعرفته اني عربي يسالني عن طريقة تلفظ اسمه ، وهل الافضل ان يقال الخارزمي او الخوارزمي ؟ فاجبته في حينه : اننا نفضل استعمال الخوارزمي فنقول انه محمد بن موسى الخوارزمي ، ثم اشار بعد ذلك الى جهود العلماء العرب واسهاماتهم الفذة في الرياضيات وسمعت منه لاول مرة في حياتي الدراسية ان بين اسم الخوارزمي والمفهوم الشائع (Algorithmus) في الرياضيات علاقة وطيدة عرفها الانسان منذ مائة عام ، بان اسم « الفورثم » مشتق من اسم العالم العربي الخوارزمي (778 – 830)(2) .

وبعد عشرين سنة اعود الان لدراسة هذه المسالة التي اهملتها لاناقشها من زاوية جديدة وفي ضوء مبادىء ومفاهيم المنطق الرياضي .

ومن اجل ذلك اقسم موضوع منطق الخوارزمي الى اوجه متعددة تؤلف مع خطة البحث جميع ما تحتويه هذه الدراسة :

خطة البحث (1 :)

المنطق والطريقة (2 : ، 3 :)

الحساب والفن الارتباطي (4 :)

الحساب المنطقي لجبر الخوارزمي (5 :)

طريقة الرد في الجبر (6 :)

الجبر والحل الهندسي (7 :)

1 – ان الغاية التي انشد تحقيقها في هذا البحث تتجلى في الكشف عن اصول المنطق والطريقة التي وضع اسسها عالم الرياضيات العربي محمد بن موسى الخوارزمي وذلك من خلال دراسة تحليلية لكتابه في الجبر والمقابلة واسلوب تفكيره وان ابرهن على انه رائد المنطق الرياضي ومبتكر جديد يختلف عن منطق ارسطو .

ولابد لنا قبل ذلك ان نتعرف على شخصية الخوارزمي واعماله العلمية . لم تذكر كتب التراجم والسير العربية القديمة عن حياة الخوارزمي الا القليل ويقول عنه ابن النديم « ان اسمه محمد بن موسى ، واصله من خوارزم وكان منقطعا الى خزانة الحكمة للمامون ، وهو من اصحاب علوم الهيئة ، وكان الناس قبل الرصد وبعده يعولون على زيجه الاول والثاني ، ويعرفان بالسند هند .

وله من الكتب : كتاب الزيج نسختين اولى وثانية ، كتاب الرخامة ، كتاب العمل بالاسطرلابات ، كتاب عمل الاسطرلاب ، كتاب التاريخ »(3) .

ولا يذكر صاحب الفهرست كتاب الخوارزمي في الجبر والمقابلة وكتابه في الحساب ، بينما نجد القفطي يذكر كتاب الجبر والمقابلة عند استعراضه لمؤلفاته(4) . ويذكر له كتاب الحساب في ترجمة حياة كنكه الهندي فيقول « ومما وصل الينا من علومهم (يقصد الهنود) حساب العدد الذي بسطه ابو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي وهو اوجز حساب واخصره واقربه تناولا واسهله ماخذا يشهد للهند بذكاء الخاطر وحسن التوليد وبراعة الاختيار والاختراع »(5) .

ولا يذكر ابن ابي اصيبعة في كتابه شيئا عن الخوارزمي ولكنه يذكر محمد بن موسى المنجم فيقول « وهو احد بني موسى بن شاكر الحساب المشهور بالفضل والعلم والتصنيف في العلوم الرياضية وكان محمد هذا من ابر الناس بحنين بن اسحق ، وقد نقل له حنين كثيرا من الكتب الطبية »(6) . ويبدو الان بوضوح ضرورة التمييز بين شخصيتين هما محمد بن موسى الخوارزمي ومحمد بن موسى ابن شاكر المنجم ، وقد تنبه الى ذلك القفطي حين يذكر « محمد ابن موسى المنجم الجليس وليس بالخوارزمي كان هذا رجلا عالما بالنجوم خبيرا بمجالسة الملوك ومحاضرتهم وكان في زمن المامون وبعده »(7) .

وفي ترجمة حياة محمد بن ابراهيم الفزاري يذكر القفطي محمد بن موسى الخوارزمي في معرض حديثه عن السند هند : « انه قدم على الخليفة المنصور في سنة ست وخمسين ومائة رجل من الهند قيم بالحساب المعروف بالسند هند في حركات النجوم ... فامر المنصور بترجمة ذلك الكتاب الى العربية وان يؤلف منه كتاب تتخذه العرب اصلا في حركات الكواكب فتولى ذلك محمد بن ابراهيم الفزاري وعمل منه كتابا يسميه المنجمون السند الهند الكبير وتفسير السند الهند باللغة الهندية الدهر الداهر وكان اهل ذلك الزمان اكثر من يعملون به الى ايام الخليفة المامون فاختصره له ابو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي وعمل منه زيجه المشهور ببلاد الاسلام »(8) .

وبعد فان خطتي في البحث تختلف عما هو متعارف عليه عند تناول المسائل التراثية ، وغايتي ان اثبت جدواها عن طريق ما تظهره من نتائج علمية مهمة وان ابرهن بطريقة غير مباشرة على عدم جدوى الطريقة التاريخية في بحث التراث العلمي العربي ، واقصد بالطريقة التاريخية الاسلوب الذي اتبعه معظم المستشرقين في سلخ القيمة العلمية واصالة التراث العلمي والفكري العربي بمحاولة ارجاعه الى مصادر غير عربية تاثر بها واخذ عنها مع افتراض مسبق ان كل انجاز عربي لا يمكن ان يكون اصيلا وذاتيا ، وما على البحث التاريخي الا ان يثبت اصل هذا الانجاز أو ذاك لامم اخرى غير الامة العربية وغالبا ما نجد تحيزا واضحا لحضارات اخرى مثل الحضارة اليونانية والفارسية والهندية والبابلية القديمة في رد كل انجاز عربي اليها .

ان من اكبر الاخطاء التي رافقت مهمة دراسة التراث العلمي العربي وكشف دوره في تطور العلم ، محاولة بحث الانجازات العلمية من زاوية التحيز المطلق للفكر اليوناني ، فنجد الباحث ينظر في

الجبر والمقابلة

د. ياسين خليل

التراث العربي ليجد ما يوافق مقولات واصول الفلسفة اليونانية والعلم اليوناني فان وجد اختلافات او ابتكارات غير معروفة عند اليونان تراه اما ان يغفلها او يقلل من شانها ، او ينسبها الى بدايات يونانية بسيطة وهو في كل ذلك ينطلق من عقدة تفوق العقلية الاوروبية على كل ما عداها ومن ابرز الامثلة على ذلك ما يذكره بيل عن جبر الخوارزمي بقوله : « ان الانجاز باجمعه ما هو الا مزيج من النتائج اليونانية والهندية ، وان التقدم الرئيس الذي حققه هو تطبيق اسماء الاعداد الهندية على الحل العددي للمعادلات »(9) .

ومن الطريف ان تتعدد الاجتهادات في ارجاع الابتكار العربي لتثبت في النهاية عقم الطريقة التاريخية وتفاهة التحيز الاوروبي ، فيذكر الدوميلي في حديثه عن جبر الخوارزمي ما نصه : « اما الخوارزمي فانه لم يكن شخصيا مبدع هذا الجبر الحديث ولم يكن الا ناطقا بلسان المدرسة البابلونية او الايرانية القديمة ، التابعة مع ذلك لتيار التجديد والاصلاح »(10) .

وتتميز خطتي في البحث باعتمادها على المصادر العربية بالدرجة الاولى ، وعلى معرفة بالتطورات الكبيرة التي وافقت تطور المنطق والرياضيات ، وصلة الطريقة الخوارزمية بهما بالدرجة الثانية ، واعتراف بعض العلماء المعاصرين باهمية هذه الطريقة وعدوها في المنطق الرياضي بالاضافة الى ما اكتسبته من اهمية في الرياضيات ، وغايتي من كل ذلك ان اذهب بالبحث الى آفاق جديدة ، اذ المفروض في البحث العلمي دراسة المسائل التفصيلية اضافة الى الاطار العام لمعرفة الابتكارات الحقيقية التي توصل الى تثبيتها الخوارزمي ، وذلك في ضوء ما تحقق من انجازات في الطريقة ، وهذا الاسلوب في البحث العلمي ليس جديدا على الفكر العلمي فقد طرحه كثير من العلماء في دراساتهم لمسائل تراثية ، فمن المعروف مثلا ان منطق ارسطو قد درس في الوقت الحاضر من زاوية المنطق الرياضي الحديث اذ امكن بمساعدة مفاهيم المنطق الرياضي واسلوب التدوين الرمزي عرض المنطق القديم من زاوية منطقية حديثة كما في كتاب لوكاسيافتش J. Lukasiewicz المعروف بنظرية ارسطو القياسية(11) ، كما درست مخلفات الفلاسفة اليونان من زاوية ما توصل اليه العقل الانساني في الفيزياء والرياضيات والبيولوجيا والكيمياء والتكنولوجيا وغيرها .

تتلخص خطة البحث في ابراز عدة اوجه منطقية ورياضية يرتبط بعضها ببعض بحيث تؤلف في مجموعها الطرق المتعددة لمنطق الخوارزمي الذي اعتمده في الجبر والمقابلة في البناء ، وفي الرد الى الاشكال الرئيسة الستة من المعادلات ، وفي ايجاد الحلول الجبرية والهندسية للمجاهيل ، ويمكن اجمال ما نستهدفه في منطق الخوارزمي بالاوجه الاتية :ـ

أ ـ كشف البناء الجبري الذي استهدف الخوارزمي اقامته مع مقارنة ذلك بانظمة العلم البرهاني : النظام المنطقي والنظام الهندسي .

ب ـ كشف الطريقة العامة ومجموعة الاجراءات التي اتبعها الخوارزمي في الحصول على الحقائق الجبرية : النظرية والعملية ، مع الاهتمام بالبراهين التي اعتمد عليها في ابتداع الاساليب والاجراءات .

جـ ـ كشف طريقة الرد الجبري في حل المسائل الجبرية المختلفة ، وذلك عن طريق رد المعادلات المختلفة في الصيغ الى الاشكال الرئيسة الستة وما يقترن بها من حلول جبرية .

د ـ كشف العلاقة بين الجبر والهندسة باسلوب الخوارزمي ذاته ، لادراك طريقة اكتشاف الحل لبعض المعادلات الرئيسة ، والتعبير عن الحل الهندسي باسلوب جبري عام يأخذ صورة الدستور .

وفي سبيل تحقيق هذه الاوجه في البحث لابد لنا من تحديد دقيق لبعض المفاهيم العلمية مثال ذلك ما نقصد بالمنطق واختلاف منطق الخوارزمي عن منطق ارسطو ، وما نقصد بالجبر والمقابلة ، مع الاهتمام كذلك بالفن الارتباطي Ars Combinatoria والحساب وعلاقتهما بمنطق الخوارزمي ، وبذلك يكون السبيل ممهدا نحو التحليل المنطقي لعناصر الجبر والمقابلة لاظهار المفاهيم الاولية المستخدمة في الجبر والتعريفات الضرورية ، ثم بناء الصيغ او الاشكال الجبرية الستة بالاعتماد على المفاهيم الاولية مع كشف مجموعة العمليات الجبرية والحسابية التي تساعد الباحث في الوصول الى النتائج مهما اختلفت المقدمات والمفروضات ، وهكذا تقودنا الخطة بالضرورة الى كشف الجوانب المنطقية والرياضية للطرق المختلفة الموصلة الى الحلول الصحيحة مع بيان الجانب التعليمي في تفكير الخوارزمي وتسخير المعرفة الجبرية لمقتضيات العصر وضرورياته .

2 ـ لقد اقترن المنطق باسم ارسطو (384 ـ 322 ق. م) على اساس انه المؤسس لهذا العلم وواضع اصوله وشارح ما يرمي اليه ، على الرغم من ان بداياته وبعض قوانينه تمتد الى المحاولات الاولى للانسان في فهم ما يجرى حوله وتنظيم معرفته واستنتاج بعض القضايا من خلال طرحه لمقدمات يعتقد بصدقها(12) .

واقترنت الهندسة باسم اقليدس (365 ؟ ـ 300 ؟ ق. م) على اساس انه اول من اقام نظاما لعلم الهندسة وفق شروط منطقية معينة تنظمت بموجبها القضايا الهندسية في ترتيب وتنسيق منطقيين ، على الرغم من ان بدايات هذا العلم تمتد الى المحاولات الاولى للانسان في استنباط حقائق هندسية عامة من خلال تجاربه وخبراته في بناء الحضارة واتقاء اخطار الكوارث الطبيعية مثل الفيضانات واقامة المعابد والسدود والقصور وغيرها من الاوجه العمرانية(13) .

ولابد لنا من ان نثير السؤال الاتي :ـ لماذا تقرن المنطق بارسطو والهندسة باقليدس ، اذا علمنا ان عددا غير قليل من العلماء ممن سبقوا ارسطو في المنطق ، واقليدس في الهندسة جاهدوا في تطوير هاتين المعرفتين ؟ نجد جواب هذا السؤال عند مراجعتنا لتطور المنطق ، اذ لم يصبح المنطق معرفة نظرية مضبوطة ، ولم يأخذ شكله الاستدلالي كمعرفة منظمة الا عند ارسطو الذي ترك لنا آثاره المنطقية التي جمعت من بعده في كتاب عرف بالآلة او الاورغانون (Organon) وفيه تجلت غاية ارسطو في بناء المنطق كعلم برهاني يبدأ

من مقدمات مفروضة ومفاهيم موضوعة واستدلالات وبراهين(14) . اما ما يخص الهندسة كعلم نظري فان لاقليدس الفضل الكبير في توحيد المعرفة الهندسية في نظام متناسق يبدأ من مفاهيم هندسية وبديهيات (Axioms) ومصادرات (Postulates) ليصل الى البرهان على صدق قضايا هندسية اخرى هي ليست بديهيات وليست مصادرات وتعرف عادة بالمبرهنات Theorems في بناء غاية القليدس في كتابه الذي عرف بالاصول Elements وتجلت الهندسة كعلم برهاني يعتمد على البرهان والاستنتاج المنطقي لاثبات صدق القضايا الهندسية من دون اللجوء الى الخبرة الحسية والتجربة ، وذلك عن طريق اختيار مجموعة قليلة من المقدمات Premisses للبرهان على جميع القضايا الهندسية المعروفة .

وكان للمنطق والهندسة تاثيرهما البالغ في تصور العلماء لما يجب ان تكون عليه المعرفة العلمية ، فنجد عدداً من الباحثين قديما وحديثا يتناولون منطق ارسطو بالشرح والتحليل والاضافة والتطوير ، ولم يفقد اهميته في الدراسات الفلسفية والمنطقية حتى يومنا هذا(15) ، على الرغم من ابتداع علماء الرياضيات والمنطق في العصور الحديثة انواعا منطقية اخرى واساليب مبتكرة في معالجة مشكلات العلوم واسسها ، وحضيت الهندسة باهتمام علماء الرياضيات والطبيعة والفلسفة ، واتخذت نموذجا للعلم المنظم يحتذى به عند بناء معرفة علمية جديدة(16) ، وامتدت اليها يد البحث والشرح والدراسة واثير حول بعض المسائل فيها عدد من المشكلات كان من ابرزها المشكلة المعروفة بالتوازي(17) ، واهتم علماء الرياضيات العرب بهذه المشكلة وتناولها بالبحث عدد منهم ، فالفوا الكتب والرسائل العلمية ، يذكر منهم عمر الخيام (توفي في 1121م) الخازن والشني والفيريزي وابن الهيثم(18) ، بينما يذكر نصير الدين الطوسي (1201 – 1274) اخرين فيقول « فمنهم من بدلها (اي مصادرة التوازي) بمصادرة اخرى قريبة منها في الظهور والخفاء وهو ابو علي بن الهيثم المتبحر في الفن الرياضي ، ومنهم من اقام عليها برهانا مبنيا على مقدمة لا يتقدمها الى الوضوح والجلاء وهو الحكيم العالم ابو الفتح عمر الخيامي ، ومنهم من بناها على مقدمة مغالطية لا تروج على صاحب الفطنة والذكاء وهو الفاضل العباس بن سعيد الجوهري(19) » كما اضيفت الى الهندسة قضايا جديدة ، وبذلت محاولات لازالة ما ظهر فيها من ثغرات ونواقص في النظام وفي الطريقة حتى استطاع عالم الرياضيات دافيد هلبرت (1862 – 1943) اعادة بناء هندسة اقليدس على اسس جديدة خالية من كل الانتقادات التي وجهت اليها وارسى دعائم الطريقة البديهية (Axiomatic Method) المعروفة في الرياضيات والمنطق(20) .

ولكن العلم الرياضي لا يقتصر على الهندسة ، وان الفروع الاخرى التي اهتم انسان وادي الرافدين ووادي النيل بها لا تقل اهمية عن الهندسة ، فالجبر والاوجه الرياضية لعلم الفلك من الابداعات الرياضية المهمة ، وعرف اليونان بفضل اتصالهم الحضاري بالحضارة البابلية والمصرية ان العلم الرياضي يضم اربعة فروع هي الهندسة والحساب والموسيقى والفلك ، فمنذ فيثاغورس (569 – 500 ق. م) شمل العلم الرياضي الفروع الاربعة نتيجة اتصاله بمصر وبابل ، فمن المعروف انه سافر الى مصر ومكث فيها زمنا ، واتصل برجال الدين فيها وتعلم منهم ، وزار بابل ومكث فيها مدة طويلة فتعلم من اهلها العلوم الرياضية ، ثم عاد الى اليونان ليؤسس فرقة سرية عرفت باسمه امتزجت في تعاليمها افكار لاهوتية واسطورية الى جانب الاهتمام بالمعرفة الرياضية(21) .

لقد تركز انجاز اليونان حول الهندسة والطريقة الاستدلالية فيها، بينما لم يحققوا ذات المستوى بالنسبة للفروع الاخرى ، ولا نجد في ابحاثهم ما يشير الى اهتمامهم بالجبر على الرغم من احتكاكهم بالبابليين الذين تميزت عقليتهم بالابداع الجبري(22) .

ان اهتمام اليونان الشديد بالهندسة من الزاوية البحتة المنطقية والصورية لا يعني مطلقا انهم واضعو اسس الرياضيات البحتة ، كما لا يدل ذلك على ان عقليتهم النظرية افضل من عقلية شعوب الشرق الادنى القديم التي تميزت بالتجريبية وبعض الاوجه النظرية الضرورية .

لقد وقع مؤرخو العلم في اخطاء كثيرة نتيجة نظرتهم الى انجاز الحضارات غير اليونانية من زاوية ضيقة ، حيث امسكوا بهندسة اقليدس ومنطق ارسطو وغيرهما مقاييس يقاس بها ما انجزه الاخرون في العلم ، فالمنطق كما نعلم الان ليس بالضرورة ان يكون على طريقة ارسطو فقط ، وان الطريقة المنطقية في تنظيم المعرفة العلمية ليست بالضرورة الطريقة الاستدلالية المطروحة في كتاب الاصول لاقليدس فقط ، وان مجرد التفكير برد كل انجاز علمي وفكري الى اليونان خطأ كبير يقترف بحق العلم وشعوب الارض التي ساهمت في تقدم العلم ونموه .

ان الحساب والجبر من العلوم الرياضية المهمة من الناحيتين النظرية والعملية ، اضافة الى اهميتهما في العلوم الاخرى ، وبخاصة في الفيزياء ، وللعلماء العرب دور بارز وكبير في ارساء دعائم هذين العلمين ، وكما اقترنت الهندسة باسم اقليدس ، والمنطق باسم ارسطو ، فمن الضروري ان يقترن الحساب والجبر باسم محمد بن موسى الخوارزمي ، لانه اول من نظم المعرفة الحسابية والجبرية وابتكر الاساليب الجديدة في الوصول الى المجهول بدلالة المعلوم ، ليحقق طريقة ثابتة وعامة لحل المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية .

لا شك ان شعوب الشرق الادنى القديم قد عرفت طرقا مبتكرة لحل المسائل الجبرية ، وبالتحديد عرف البابليون الجبر وكانت لهم ابتكارات مهمة في هذا الميدان ، وعرف المصريون حل المسائل الجبرية ، وان كانت انجازاتهم في ميدان الجبر اقل مستوى من الجبر البابلي ، وعلى الرغم من ان معرفتنا بالجبر البابلي تعتمد اساسا على مجموعة محدودة من النصوص المدونة على الالواح الطينية التي عثر عليها ، والتي يعود تاريخ القسم الاكبر منها الى عصر حمورابي (1800 – 1600 ق. م) ويعود القسم الاخر الى الفترة السلوقية في القرون الثلاثة قبل الميلاد ، الا انها تزودنا بمعلومات تثبت مقدرة البابلي على حل معادلات من الدرجة الثانية واهتمامه بالحساب والفلك .

وانتقل اشعاع العلم من بابل ومصر عبر ممرات كثيرة الى اليونان التي شهدت تطورا كبيرا في مجال الفلسفة والعلم ليعود هذا الاشعاع من جديد الى الشرق في مصر بعد انهيار الحضارة اليونانية، فبرزت مدرسة الاسكندرية(23) كمركز للاشعاع الفكري والعلمي ، وهي المدرسة التي احتضنت علوم الشرق الادنى القديم بالاضافة

الى التراث العلمي والفلسفي اليوناني ، وكان لهما اكبر الاثر في دفع مسيرة العلم الى الامام ، حيث برز فيها عدد كبير من العلماء في شتى الاختصاصات ، وانفرد ديوفنطس (حوالي 250 م) Diophantus بصناعة الجبر(24) .

ان الطريقة والمفاهيم والحلول التي طرحها ديوفنطس في كتابه(25) لا تمت بصلة الى التفكير الرياضي اليوناني ، واغلب الظن انها مجرد امتداد طبيعي للجبر البابلي ، لا سيما اذا عرفنا ان مدارس يونانية قد تاسست في العراق وسوريا بعد غزو الاسكندر لهما ، وانتقلت الى الاسكندرية علوم حضارات بابل ومصر بعد ان ترجمت اثارهما العلمية الى اللغة اليونانية باعتبارها لغة الحاكم والعلم .
ولكن الجبر لم يتبلور كعلم منظم الا عند الخوارزمي في كتابه المعروف بالجبر والمقابلة(26) ، وقد حقق فيه الاوجه الاتية :ـ

أ ـ وضع اللبنات الاولى والاسس الرياضية لبناء هذا العلم على قواعد تؤدي في النهاية الى اقامة نظام متماسك للجبر .

ب ـ وضع اسس طريقة منطقية ـ رياضية جديدة في حل المعادلات جبريا وهندسيا ورد الاشكال المختلفة من المعادلات الى اشكال جبرية رئيسة .

جـ ـ تسخير الجبر في الحياة اليومية في حساب المواريث والمعاملات والوصايا اضافة الى ادراك اهميته في الهندسة والمساحة والاعمال الهندسية .

وانه لما يؤسف له ان يد البحث والدراسة الموضوعية لهذا الانجاز الضخم لم تمتد اليه ، ولم تظهر ابحاث منصفة لما انجزه العلماء العرب في علم الجبر بل بالعكس فغالبا ما نجد محاولات غربية في رد انجاز العرب في الجبر الى ما قبلهم ، منكرين عليهم الابداع والابتكار ، وقد اعتمدت اغلب هذه الدراسات على معارف بسيطة بالتراث العلمي العربي عن طريق ما تم نشره او ترجمته من مخطوطات علمية عربية ، وهو لا يمثل الا النزر اليسير .

ـ اهتم العلماء والفلاسفة العرب بالمنطق موضوعا وبالاستدلال طريقة ولكنهم في الوقت نفسه اتجهوا بالدراسات العلمية ذات الصلة بعلوم اللغة والرياضيات والطبيعة صوب مجالات جديدة ، فاستحدثوا من اجل ذلك طرقا منطقية جديدة لا عهد لفلاسفة اليونان(27) وعلماء مدرسة الاسكندرية بها(28) . ونحن هنا بصدد منطق وطريقة في الجبر تختلف اختلافا جوهريا عن الطريقة المنطقية في الفلسفة والتي استقاها العلماء والفلاسفة العرب من اثار ارسطو المنطقية وغايتنا الان ان نكشف ابرز الاختلافات بين تفكير ارسطو في المنطق خاصة والعلم البرهاني عامة وتفكير الخوارزمي المنطقي في الجبر .

من المعروف بين المهتمين في المنطق والرياضيات ان ارسطو واضع اول نظام منطقي يعتمد على الحدود Terms متوخيا منه ان يكون اساسا للدراسات الفلسفية والرياضية لذلك جاء المنطق مستلهما العلم الرياضي من هندسة وحساب وفلك وموسيقى حيث زخرت آثاره في الاورغانون بامثلة كثيرة ومتنوعة من الهندسة والحساب لشرح مسائله المنطقية ، فكان على منوال الرياضيات يبدأ من مفاهيم اولية مثل الحد والموضوع والمحمول والمقدمة والكلي والجزئي والموجب والسالب وغير ذلك ، وقوانين منطقية في الاستنتاج والاشتقاق واستدلالات كثيرة اتخذت شكل اقيسة Syllogisms حيث يتالف كل قياس من مقدمتين تتبعهما نتيجة بالضرورة لازمة عنها منطقيا ، وقد اختار ارسطو بعض الاقيسة على اساس انها اقيسة تامة(Perfect Syllogisms) (بديهيات او مقدمات اساسية) بينما عمل على رد Reduction بقية الاقيسة بمساعدة قواعد منطقية معينة الى الاقيسة التامة ، وذلك للبرهان على صدق الاقيسة اعتمادا على صدق المقدمات الاساسية .

واشترط ارسطو في تحليله للعلم البرهاني ان يبدأ من مفاهيم اولية غير معرفة واخرى معرفة ، ومن بديهيات هي قضايا صادقة بالضرورة واولية ومباشرة تشترك في أكثر من علم واحد ولا تفتقر الى برهان ، ومن مصادرات لا تختلف عن البديهيات في الشروط الا في ناحية ارتباطها بعلم او موضوع بحث واحد وانطلق ارسطو في تاكيد ضرورة البدء بقضايا صادقة لا تفتقر الى برهان من حقيقة ان الضرورة المنطقية تقتضي ان لا يستمر ارجاع او رد القضايا بعضها الى بعض الى ما لا نهاية وفي ذلك يقول « اما مذهبنا فانه ليس جميع المعرفة برهانية ، فعلى العكس ان معرفتنا للمقدمات المباشرة او الاولية مستقلة عن البرهان ، وضرورة ذلك واضحة لانه لابد لنا من معرفة المقدمات الاولية التي يبدأ البرهان منها ، ولما كان ضروريا ان ينتهي الارجاع في الحقائق البديهية ، فان هذه الحقائق يجب ان تكون غير قابلة للبرهان »(29) .
اما القضايا الاخرى المنتمية الى موضوع العلم البرهاني فهي في نظره مبرهنات تفتقر الى برهان او اثبات ، لذلك ترد الى البديهيات والمصادرات لاثبات صدقها .

وعلى الرغم من وضوح الطريقة والموضوع والهدف ، الا اننا لا نجد تعريفا اصطلاحيا دقيقا لمفهوم (المنطق) في مؤلفاته ، وان ما نجده هو بعض العبارات المرادفة ، فما هو (منطقي) Logical عندنا اليوم معناه عند ارسطو تحليلي او مستنتج من مقدمات(30) .

ان تفكير ارسطو المنطقي قد انعكس ولا شك في الفلسفة والعلم على من جاء من بعده ، وبصورة خاصة على علماء وفلاسفة مدرسة الاسكندرية وفي هندسة اقليدس ، حيث جاء بناؤها متفقا مع الشروط المنطقية التي ثبتها ارسطو للعلم البرهاني ، واختلفت الهندسة في الطريقة البرهانية عندما سارت باتجاه استدلالي ، يبدأ البرهان فيها من البديهيات والمصادرات والتعريفات نزولا الى استنتاج نتيجة هي ما مطلوب البرهان عليه ، بينما اتبع ارسطو في نظريته المنطقية في القياس طريقة الرد وذلك بارجاع القياس الناقص Imperfect Syllogism الى قياس تام(31) .

لقد وجد المنطق وتحليل ارسطو للعلم البرهاني مكانة بارزة عند الفلاسفة والعلماء العرب ، حيث ركز الفلاسفة على دراسة الاستدلال القياسي وتناول العلماء الاستدلال عامة وتحليل العلم البرهاني وانتشر بين الفلاسفة العرب ان المنطق يتناول دراسة القوانين التي تصون العقل من الوقوع في الخطأ وتوجهه نحو معرفة الصواب بينما اهتم العلماء العرب بصلة المنطق بالعلوم والشروط التي يجب توفرها في العلم البرهاني .

لقد طرح الخوارزمي منطقا جديدا في الجبر والمقابلة يختلف عن

منطق ارسطو والطريقة الاستدلالية في هندسة اقليدس ، فهو منطق متحقق في علم رياضي لا يكتفي بوضع الشروط ، ويطبق طريقة جديدة في الرد تتفق في بعض الوجوه مع طريقة ارسطو في الرد المنطقي ولكنها تختلف في الوقت نفسه في التفصيلات .

يختلف علم الجبر عن علم الهندسة والمنطق من حيث الموضوع ، فبينما تهتم الهندسة كعلم نظري بمفاهيم خاصة مثل النقطة والخط والمستوى والدائرة والاسطوانة وغيرها . ونجد ان المنطق مهتم بمفاهيم خاصة به ، في حين تبرز في علم الجبر مفاهيم جديدة يستخدمها الخوارزمي مثل المال والجذر والعدد المفرد اضافة الى مفاهيم حسابية اخرى .

وفي الحقيقة اننا نجد لاول مرة اسس نظرية رياضية تختلف كليا عن الاسس الهندسية والمنطقية في ربطها مفاهيم جبرية واخرى حسابية في صيغ واحدة وفي اتخاذ الصيغ الجبرية العامة والقوانين الجبرية في الحل اساسا تجري بمقتضاها التطبيقات الحسابية ، وفي البناء الجبري الذي يبدأ بالمفاهيم لينتقل الى تثبيت الاشكال الجبرية الاساسية والقوانين والقواعد الجبرية ليصل الى البرهان على رد معادلات اخرى من الدرجة الثانية الى الاشكال الستة الرئيسة لتكون جاهزة للحل بالدستور .

ويكمن الاختلاف الاخر بين منطق الخوارزمي والمنطق الارسطي والهندسة في ان الاول لا يعتمد على طرح بديهيات او مصادرات مفروضة ، فهو لا يتفق من حيث الاساس مع جوهر التفكير اليوناني المنطقي ، بل يطرح منذ البداية اشكالا جبرية اساسية يجري بمقتضاها العمل باعتبارها انماطا اساسية Prototype للنظرية الجبرية ، بينما تتضمن الطرق المختلفة للحل قواعد جبرية وبعض القوانين الاساسية ، وهي قواعد وقوانين يتخذها الخوارزمي ادوات لحل المعادلات المختلفة ، ولكن ذلك لا يعني مطلقا ان منطق الخوارزمي خلو نهائيا من البديهيات بل المقصود هو انه لم يفترض مقدماته الجبرية الست على اساس انها بديهيات وانما افترضها لسبب اخر لوجود حلول ثابتة لها تنتهي عندها جميع اشكال معادلات الدرجة الثانية وسنشير في الوقت المناسب الى بعض البديهيات التي استخدمت ضمنا في الحلول الجبرية .

واخيرا فان الطريقة الخوارزمية تهدف من حيث الاساس الى الكشف عن المجهول بدلالة المعلوم ، وليس البرهان على صدق المعلوم بدلالة صدق المقدمات كما هو الامر في الهندسة ، وهذا يدل على ان الخوارزمي يسلك في الجبر طريقا مختلفا عن الطريقة الاقليدية في الهندسة ، ولاجل ذلك يطرح عدة اشكال رئيسة من المعادلات الجبرية ويبتدع الطرق المختلفة لحلها ببعض القواعد العامة التي لا يزال الجبر الحديث يعتمد عليها .

وفي كل ما ذهب اليه تبدو الافادة من الحساب والموازنة بين الحساب والجبر واضحة ، فللجبر حدود خاصة تستخدم الاعداد الصحيحة والكسور وعمليات حسابية واخرى جبرية ، وللعلم الحساب مفاهيمه او حدوده التي هي الاعداد وعمليات لاستخدام النتائج عن طريق الضرب والطرح والجمع والقسمة وهي عمليات لا تقتصر على الاعداد الموجبة بل تتعدى ذلك الى الاعداد السالبة والكسور المختلفة ، ولقد ادرك الخوارزمي اهمية الاعداد وقوامها فذهب الى القول (واني لما نظرت فيما يحتاج اليه الناس من الحساب وجدت جميع ذلك عددا ووجدت جميع الاعداد انما تركبت من الواحد والواحد داخل في جميع الاعداد)(32) .

وفي هذا النص ما يشير الى ادراك واضح لاهمية الاعداد الطبيعية على اساس ان الحساب جميعه يعتمد على الاعداد وان جميع العمليات الحسابية مهما كانت حدودها اعدادا صحيحة او كسورا ، ترجع في الاساس الى الاعداد .

ثم وجد الخوارزمي بذكاء رياضي ان جميع الاعداد تتركب من الواحد والواحد داخل في جميع الاعداد ، وهذا معناه ان متوالية الاعداد الطبيعية التي بين اهميتها في الشق الاول من الفصل ، تبدأ بالعدد واحد وان الاعداد الاخرى التالية يدخل فيها الواحد كذلك ، ويمكن التعبير عن هذا القول بالطريقة الاتية :ـ

العدد 1 يتركب من العدد واحد (1 = 1)

العدد 2 يتركب من 1 + 1 (1 + 1 = 2)

العدد 3 يتركب من 1+1+1 (1 + 1 + 1 = 3)

العدد 4 يتركب من 1+1+1+1 (1 + 1 + 1 + 1 = 4)

وهكذا يطبق المبدأ على جميع الاعداد

وتظهر الافادة والموازنة كذلك في العمليات الحسابية ، حيث يضع الخوارزمي ابوابا لحساب الجبر والمقابلة : في الضرب(33) ، وفي الجمع والنقصان(34) ، وفي القسمة(35) ، وهذه هي العمليات الاربع المعمول بها في الحساب كذلك .

ولابد لنا ان نتساءل الان بصدد بيان الاختلافات بين منطق الخوارزمي ومنطق ارسطو وهندسة اقليدس عن المعنى الرياضي الذي اقترن بالجبر والمقابلة ، وللاجابة على ذلك ارى ضرورة التمييز بين حساب الجبر والمقابلة وطريقة الجبر والمقابلة ، لاعتقادي ان هذا المسلك يوضح لنا بعض ما وقع فيه من غموض واخطاء .

لقد ذكر الخوارزمي اسم الجبر والمقابلة في عدة مواضع من كتابه ، وهي تشير الى انه قصد بالاسم مجموعة المفاهيم الجبرية والحسابية والاشكال الستة الرئيسة للمعادلات الجبرية وجميع العمليات الحسابية في الجبر والاعداد ومن اقواله التي تؤيد ما اذهب اليه : (ووجدت الاعداد التي يحتاج اليها في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور واموال وعدد مفرد لا ينسب الى جذر ولا الى مال)(36) .

هذا فيما يتعلق بالمفاهيم ، اما ما يتعلق بالاشكال الجبرية للمعادلات فيقول (ووجدنا كل ما يعمل من حساب الجبر والمقابلة لابد ان يخرجك الى احد الابواب الستة التي وصفت في كتابي هذا وقد اتيت على تفسيرها فاعرف ذلك)(37) .

ثم يتناول بعد ذلك العمليات الحسابية في باب الضرب والجمع والنقصان والقسمة ، ويذكر في موضع آخر : (وقد قدمنا قبل ابواب الحساب ووجوهها مسائل جعلتها امثلة للستة الابواب المتقدمة في صدر كتابي هذا لابد ان منها ثلاثة لا تتصف فيها الاجذار ، وذكرت ان حساب الجبر والمقابلة لابد أن يخرجك الى باب منها ثم اتبعت ذلك من المسائل بما يقرب من الفهم وتخف فيه المؤنة وتسهل فيه الدلالة ان شاء الله تعالى)(38) .

يظهر لنا الان وبشكل قاطع ان الجبر والمقابلة في عرف الخوارزمي حساب اجتمعت فيه مفاهيم جبرية وحسابية واشكال جبرية رئيسة وعمليات حسابية اربع تجرى في ضرب الاعداد والاموال والجذور ، وتجمع وتطرح وتقسم .

اما طريقة الجبر والمقابلة فانها تشير الى ما يجب عمله لحل بعض المعادلات الجبرية ، فالمعادلة الجبرية التي يظهر فيهـــا استثنـــاء (نقصان) يجب ان يكمل شريطة ان يزاد مثـــل ذلك الى الطرف الاخر ، بينما يشترط ان تطرح او تسقط الاجنـــاس المتساوية في طرفي المعادلـة . ويطلق على الاجـراء الاول والثاني اســم الجبر والمقابلة .

لقد ذهب بعض من عمل في تاريخ العلوم ومنهم الدوميلي الـى القول : (اما عند العرب فلم يذكر الخـــوارزمي تفسيرا لهـــذين اللفظين ، ولكننا نجد ذلك عنـــد محمد بن الحسين بهـــاء الدين العاملي (1547 – 1621) وهو سوري ، ومؤلف عـــدة كتب في العربية والفارسية ، واشهر كتبه كتاب الكشكول ولكنه الف ايضا في الرياضة والفلك ، وهكذا اعطى في كتابـه خلاصـــة الحساب ، التعريف التالي الذي ذكره نسلمان G. H. L. Nesselmann بالنص مع الترجمة الالمانية في كتابـــه : الجبر عند اليونان(39) ، هذا هو التعريف المشار اليه « الطرف ذو الاستثناء يكمل ، ويزاد مثل ذلك على الاخر وهو الجبر ، والاجناس المتساوية في الطرفين تسقط منها ، وهو المقابلة »(40) .

لقد وقع الدوميلي في الخطا فيما ذهب اليه ، وعذره ، انه اطلع على بعض الترجمات والدراسات المنشورة في زمانه والتي وصلت الى متناول يده ولو عرف ان تعريف هذين اللفظين ظهر في فترات سابقة جدا على ما ذكره وانه ليس من المعقول ان يترك امر تعريفهما الى القرن السادس عشر ، لما وصل الى هذه النتيجـــة الواردة في الفصل ، وتدل المعلومات التاريخية على ان كتاب الجبر والمقابلـة قد فتح بابا رياضيا جديدا ولجـه عدد كبير من العلماء ، وان كتاب الجبر والمقابلة لم يكن الكتاب الوحيد الذي تصدى الى هذا النوع من الحساب ، وان تطورا واسعا قد ظهر في مجال حل المعادلات الجبرية مثل معادلات الدرجة الثالثة التي برز فيها محمد بن عيسى الماهاني في القرن التاسع الميلادي وثابت بن قرة (935 – 900) وابو جعفر الخازن وغيرهم ، ومعادلات الدرجة الرابعة التي برز فيهـــا عمـــر الخيام ، ولا يثيرنا العجب اذا وجدنا تعريف الجبر والمقابلة عنـــد عبدالله محمد بن احمد بن يوسف الكاتب الخوارزمي الذي عـــاش في القرن العاشر الميلادي ، فوضع كتابه (مفاتيح العلـــوم) الذي انجزه حوالي سنة 970 م وذكر فيه انواع المعارف والعلوم وتعريفات كثيرة ، ويذكر تعريف الجبر والمقابلة في بحثه عن الحساب فيقول (الجبر والمقابلـــة صناعة من صناعات الحســـاب وتدبير حســـن لاستخراج المسائل العويصة في الوصــــايا والمواريث والمعـــاملات والمطارحات وسميت بهذا الاسم لما يقـــع فيهـــا من جبر النقصانات والاستثناءات ومن المقابلة بالتشبيهات والقائها مثال ذلك ان يقـــع في المسئلة مال الى ثلاثة اجذاره يعدل جذرا فجبره ان تقـــول مال يعدل اربعة اجذار وذلك ستة عشر لانك تممت المال وزدت عليـــه ما كان مستثنى منه فصار مالا تاما ثم احتجت ان تزيد مثـــل ذلك المستثنى على معادلة فصار المعادل اربعة اجذار ، واما مثال المقابله فمثل ان يقع في المسئلة مال وجذران تعـــدل خمسة اجذار فتلقى الجذرين اللذين مع المال وتلقى مثل ذلك من معادله فيحصـــل مال يعدل ثلاثة اجذار وذلك تسعة)(41) .

ولتوضيح الجبر والمقابلة بامثلة هذا النص نلجا الى طريقة الجبر الحديث في التدوين الرمزي ، فتتحول جميع الاقوال الخاصة بالمعادلة في حالة الجبر والمقابلة الى ما ياتي :ـ

س 2 – 3 س = س

س 2 – 3 س + (3س) = س + (3س) الجبر بزيادة (3س) الى طرفي المعادلة .

س 2 = 4 س

س 2 + 2 س = 5 س

س 2 + 2 س – (2س) = 5 س –(2س) المقابلـــة بطـــرح او القـــاء (2س) مـــن طرفي المعادلة .

س 2 = 3 س

س 2 = 9

من الخطا الاعتقاد ان طريقة الجبر والمقابلة هي الطريقة الوحيدة المستعملة في كتاب الخوارزمي ، لان التحليل المنطقي لهـــذا الكتاب يظهر لنـــا مجموعة كبيرة من الطرق والعمليـــات الجبرية لحـــل المعادلات ، وان الجبر والمقابلة مجرد طريقة واحدة من بين هـــذه الطرق .

4 ـ ان الطريقة المستخدمة في التدوين الرمزي للمفاهيم والحدود والصيغ الجبرية المختلفة لم تكن معروفة عند الخوارزمي ، وهي لم تظهـــر فجاة في الكتب الجبرية ، بل مرت بتطورات ومراحل عديدة قبل ان تصل الى ما وصلت اليه الان(42) . وكانت الطريقة المفضلة التي استعملها العلماء العرب في التعبير عن المعادلات الجبرية وحلولهـــا هي الطريقة اللغوية ، ونقصد بها استحداث مفاهيم والفاظ وتعابير خاصة بالجبر ، واستخدام اللغة العربية في التعبير عن خطوات بناء الصيغ واجراء الحلول الصحيحة ، وبذلك امكن التعبير عن الحدود والمعادلات والحلول بدقة على الرغم من الصعـــوبات التي تكتنف هذه الطريقة ، واصبح عالم الرياضيات في وضع يسمح له باجراء العمليات الجبرية المعقدة والطويلة من دون حدوث اخطاء ، وهذا امر يثير الدهشة والاعجاب .

ومن المعروف كذلك ان للخوارزمي كتابا في الحساب بسط فيـــه طريقة تدوين الارقام التي لا نزال نستعملها حتى يومنا هذا ، ولكنه لم يستخدم الارقام في كتاب الجبر والمقابلة للتعبير عن الاعـــداد في المعادلات واقتصر في استخدامها على الرسوم الهندسية التي وردت في كتابه للتعبير عن الاطوال والمساحات ، فهو يذكر المعادلة الجبرية بطريقته اللغوية ثم يعبر عنهـــا هندسيا ويثبت على الاضـــلاع او المساحات الارقام .

وقد يتساءل المرء عن السبب الذي جعل الخوارزمي لا يستخدم الارقام في المعادلات على الرغم من معرفته لها .
والجواب كما اعتقد يكمن في النقاط الاتية :ـ

1 ـ لم تكن طريقة تدوين الاعداد بالارقام معروفـــة وشائعـــة بين

الناس كما ان ذكر الارقام في معادلة غير كاملة التدوين الرمزي ليست بالطريقة الصحيحة ، لذلك لجأ الى ذكر اسماء الاعداد مع حدود المعادلة باسلوب لغوي واحد .

ب ـ كانت الطريقة اللغوية هي الشائعة في الحساب ، وخاصة بين هؤلاء المشتغلين في الوصايا والمواريث ، وقد ذكر الخوارزمي في صدر كتابه ما نصه « على اني الفت من كتاب الجبر والمقابلة كتابا مختصرا حاصرا للطيف الحساب وجليله لما يلزم الناس من الحاجة اليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقاسمتهم واحكامهم وتجاراتهم وفي جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الارضين وكري الانهار والهندسة وغير ذلك من وجوهه وفنونه »(43) .

وما دمنا بصدد الاعداد والارقام لابد لنا من ان نوضح حقيقة رياضية مهمة تجنبا لما يثيره الخلط بين العدد والرقم من لبس وايهام واستنتاج خاطئ، فالاعداد مفاهيم حسابية ، بينما الارقام مجرد رموز او صور للاعداد وانه بالامكان التعبير عن الاعداد بانواع مختلفة من الرمز ، وهذا هو عين ما وقع حيث اختلفت الشعوب قديما في رسم صور الاعداد او التعبير عنها ، فاذا قلنا ان العرب قبل الخوارزمي لم يعرفوا طريقة تدوين الارقام المعمول بها في الوقت الحاضر، فان ذلك لا يعني مطلقا انهم لم يعرفوا الحساب والعد وطرقا اخرى في التدوين ، فالعرب عرفوا الاعداد واستخدموا العمليات الاربع وغيرها من الامور الحسابية في معاملاتهم التجارية ، كما ازداد اهتمامهم بعد ظهور الدعوة الاسلامية الكريمة بالحساب في شتى وجوه الحياة وذكر القرآن الكريم الاعداد الطبيعية والكسور في حساب الارث والمعاملات الشرعية واشتدت الحاجة الى الحساب في تعداد الجند وحساب الارزاق وفرض الزكاة وجباية الاموال والضرائب والمساحة والبناء وغير ذلك .

واستخدم القرآن الكريم الاسماء اللغوية للاعداد والكسور . كما احتاجت احكامه الى معرفة دقيقة بالضرب والقسمة والجمع والطرح وهذا امر يعكس بوضوح معرفة الانسان العربي للحساب وضرورة تطوير اساليب جديدة لمنفعة الناس في حياتهم ، واستمر استعمال الاسماء اللغوية للاعداد فترة طويلة من الزمن في كتب الحساب والجبر والطبيعة وغير ذلك من العلوم .

وكان ابرز تطور في اتجاه التدوين الرمزي للاعداد استخدام العرب الحروف الابجدية للتعبير عن الاعداد ، وعلى الرغم من عدم استخدام الخوارزمي لهذه الطريقة وتفضيله طريقة ذكر اسماء الاعداد واستخدام الارقام في الجبر والمقابلة على نطاق ضيق ، الا ان طريقة تدوين الاعداد بالحروف الابجدية وهي الطريقة التي عرفت بطريقة حساب الجمل بقيت مستخدمة جنبا الى جنب مع استخدام الارقام الحسابية واستخدمت الصفة الارتباطية والترتيب الخطي للحروف الابجدية للتعبير عن الاعداد الكبيرة ولتوضيح ذلك نبدأ اولا بالحروف الابجدية المفردة وما يناظرها من الاعداد ثم نبين بامثلة اخرى طريقة التعبير عن الاعداد بحرفين او اكثر .

آحاد	ا	ب	جـ	د	هـ	و	ز	ح	ط
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
عشرات	ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
مئات	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ		
	100	200	300	400	500	600	700		
	ض	ظ							
	800	900							
الف	غ								
	1000								

وتقوم طريقة تركيب او ارتباط اكثر من حرف واحد على مبدأ ان يكون الحرف ذو العدد الاكثر هو المقدم ثم يليه الحرف ذو العدد الاصغر فالاصغر مثال ذلك :ـ

لب	رب	تم	خس
32	202	440	660
ريح	شلب	قلز	تمه
218	332	237	445

ويشير صاحب كتاب (مفاتيح العلوم) الى امكانية استخدام الحروف التسعة الاولى بالطريقة التي تستخدم فيها الارقام بقوله « وقد يكتب بهذه الحروف كما يكتب حساب الهند وهو ان تكتب بتسعة احرف منها من الالف الى الطاء وتوضع هذه العلامة في المواضع الخالية مكان الصفر في حساب الهند كي يحفظ بها الترتيب فقط »(44) .

ان اهم حقيقة نستخلصها من طريقة حساب الجمل هي الادراك الواضح للطريقة الارتباطية واهميتها في الحساب ، فالحرف البسيط يشير الى عدد معين وان الحرف المركب يشير الى عدد مركب ، وان تحليل الحرف المركب الى البسائط معناه في الوقت نفسه تحليل العدد المركب الى بسائطه .

ان خطوة الخوارزمي في استخدام الارقام في كتاب الحساب قد عزز الطريقة الارتباطية وجعلها اكثر بساطة لان اختلاف ترتيب الارقام يؤدي الى اختلاف في الاعداد ، كما ان انتظام الاعداد وسهولة التعبير عنها بانتظام قد اكسب الطريقة الارتباطية قابلية كبيرة في التعبير عن اي عدد مهما كان كبيرا او صغيرا ، ويذكر الخوارزمي هذا الانتظام العددي بقوله « ووجدت جميع ما يلفظ به من الاعداد ما جاوز الواحد الى العشرة يخرج مخرج الواحد ثم تثنى العشرة وتثلث كما فعل بالواحد فتكون منها العشرون والثلاثون الى تمام المائة ، ثم تثنى المائة وتثلث كما فعل بالواحد والعشرة الى الالف ثم كذلك ترد الالف عند كل عقد الى غاية المدرك من العدد »(45) .

ان لكتاب الحساب للخوارزمي اهمية كبيرة في تاريخ العلم ومسيرة الدراسات الرياضية ، وقد ترجم الى اللغة اللاتينية في القرن الثاني عشر ولا يزال النص اللاتيني موجودا ، بينما ضاع الاصل العربي ، وتشير الترجمة اللاتينية الى حساب الارقام الهندية Algorithmi de Mumero indorum وهو الكتاب الذي نقله ادلارد بات Adelard of Bath وان اقدم ترجمة لاتينية لكتاب الحساب للخوارزمي موجودة في مكتبة فينا تعود الى سنة 1143 ، وان الترجمة الثانية وجدت في دير سالم تحت عنوان (كتاب الخوارزمي Liber algorizmi لا تزال محفوظة الى اليوم في هايدلبرج)(46) .

وهكـــذا دخل اسم الخوارزمي في تاريخ الرياضيات ، اذ اكتسب المفهـوم الرياضي Algorithmus (47) المشتق من اسمه معنى رياضيا يدل على مجموعة العمليات الحسابية المؤدية الى الحلـــول الصحيحة ، كما اقترن اسمه بنظرية المعادلة .

احتوى كتاب الحساب للخوارزمي على طريقة استخدام الارقـام الجديدة والعمليات الحسابية الاربع من طرح وجمع وقسمة وضرب وحساب الكسور البسيطة والمركبة وباسلوب تظهر فيه البساطـة الى جانب النتائج الصحيحة عند مقارنته بالاسلوب الذي استعمله العرب في السابق والاسلوب الذي كان شائعا بين الحسابيين من اللاتين .

واذا نظرنا الى كتاب الجبر والمقابلة من زاوية حسابية لوجدنا الخوارزمي قد استخدم العمليات الحسابية للاعداد والكسور مطبقة على الجبر ومفاهيمه الجديدة ، وهذا دليل يشير الى ان الخوارزمي كتب كتاب الحساب اولا ثم الف كتابه في الجبر والمقابلة بعد ذلك .

ان ابرز ما يهمنا الان هو ما ظهر في تفكير الخوارزمي من جهة في استخدام الطريقة الارتباطية بالاضافة الى طريقـــة الاختراع التي نقصد بها اسلوب الحصول على النتائج بعمليات بسيطة ، ولا يمكن تجاهل ما للطريقة الارتباطية من اهمية في التفكير الرياضي ، وهي الطريقة التي شاعت على ما يظهر بين علماء اللغة والمناطقة .
عرف علماء اللغة العـرب الطريقة الارتباطيـــة واستعملوها في المعاجم وفي دراساتهم لابنية الالفاظ وعلاقة هذه الابنية بالمعاني في حالة المهمل والمستعمل في اللغة ، ونقصد بالطريقـــة الارتباطيـــة الخطوات الاتية :

ا ـ ان نفترض مجموعة من الحروف او الرموز او المفاهيم .

ب ـ ان نحصل على جميع الاحتمالات الممكنـة لترابط الحروف او الرموز او المفاهيم .

جـ ـ ان نميز بين ما نحصل عليه من ابنية ، وما هو مستعمل وما هو مهمل أو متروك .

ومن ابرز علماء اللغة العرب الذين اخذوا بالطريقة الارتباطيـــة الخليل بن احمد الفراهيدي (100 ـ 175 هـ) في كتابه (العين) حيث رتبت الاصوات على ما يخرج من الحلق واللهوات ، فاولهـا العين ، الحاء ، الهاء ، الخاء ، الغين ، القـاف ، الكاف ، الجيم ، الشين ، الصاد ، الضاد ، السين ، الزاء ، الطاء ، الدال ، التاء ، الظـاء ، الذال ، الثـاء ، الزاى ، اللام ، النـون ، الفـاء ، الميم ، الواو ، الالف ، الياء(48) .

وكانت الخطوة الثانية استقراء الابنية اللغوية ، حيث وجد انها اما ثنائية او ثلاثية او رباعية او خماسية ، ولا توجد ابنية اخرى في اللغة العربية تخرج عن هذه القاعدة الصرفية ، وبناء على ذلك تكون الاحتمالات المختلفة لارتباطات الاصوات محصـــورة بين الثنائي والخماسي من الابنية اللغوية ، فرأى (الخليل) ان حرف العين مثلا

يمكن ان يغير موضعه في البنـــاء الثنائي مرتين بان يكون اولا ، او ثانيا ، وفي الثلاثي ثلاثا بان يكون اولا ، او ثانيـــا ، او ثالثا ، وفي الرباعي بان يكون اولا او ثانيا او ثالثا او رابعـــا ، وفي الخماسي خمسا(49) . . .

والقاعدة الرياضية التي تتحكم في عملية التقليب (Permutation) هذه هي :ـ

في البنـــاء الذي يتالف مـن حرفين نحصـــل على صـورتين

$2 \times 1 = 2$

في البناء الذي يتالف من ثلاثة حروف نحصل على ست صـور

$3 \times 2 \times 1 = 6$

في البناء الذي يتالف من اربعة حروف نحصل على اربعة وعشرين صورة : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

في البناء الذي يتالف من خمسة حروف نحصل على مائة واربعة وعشرين صورة : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 124$

وفي ضوء ذلك تكون القاعدة الرياضية للتقليب كما ياتي :ـ

(ان عدد التقليبات (الصور) ل ن من العناصر المختلفة يساوي حاصل ضرب 1 × 2 × 3 . . . . ن لجميع الاعـداد الطبيعية مـن 1 الى ن) .

اما الخطـــوة الاخيرة فهي في التمييز بين المستعمل والمهمل مـن الالفاظ بالاستناد الى المعاني المقترنة بها ، فتسقط جميع الابنيـــة غير المستعملة والتي لا معنى لها في اللغة العربية .

ان الطريقة الرياضية في الارتباط التي ابتدعها العلماء العـــرب وجدت لها تطبيقـات في المنطق ، حيث اشـــار يوخنسكي الى ذلك صراحة بقوله : « ان التفكير في ابتداع طريقة ميكانيكية تسهل على المرء الاستنتاج متضمنة في الفن الارتباطي لقدماء الشـراح ، عند العرب والمدرسيين »(50) . وانعكست الطريقـــة الارتباطيـــة في الحساب والجبر والمقابلة واستخدمها الخوارزمي في مجال الاعـداد والمفاهيم الجبرية عند صياغته للمعادلات وامثلته المختلفة التي تدل على اهتمامه في اثبات صحة قواعده الجبرية لجميع الاحتمالات من الاعداد الموجبة وانواع الكسور المرتبطة بحدود المعادلات .

وسنتناول هذه الطريقـــة ضمنيا عند تحليلنـــا لحساب الجبر والمقابلة ومعوقاته من الحدود والمعادلات والقواعد الجبرية المختلفة دلالة على اهمية الطريقة الارتباطية في المعادلات والاشكال الســتة الرئيسة .

5 ـ وبعـد ان تم توضيح جوانب الطريقة الارتباطيـــة ومعاني الجبر والمقابلة طريقة وحسابا ، لابد لنـــا من ان نستكمل البحث بتناول جوهر المنطق والطريقة الخوارزمية في بناء النظام الجبري من حيث الاسس العامة وتفصيلاته ، وذلك بقصـد البرهان من خـلال كتاب الجبر والمقابلة على ان الخوارزمي اتبع خطـا منطقيـا جديدا في الرياضيات يقترب في روحه من الخط البنائي للرياضيات الحديثة في اقامة النظرية الرياضية والعلمية ، ولاجل ذلك سوف استخـدم مفهوم (الحساب) بمعنى جديد واقصـد بـه الحسـاب المنطقي (Logical Calculus) مبينا ان ما وصفه الخوارزمي في هـــذا الباب من التفكير المنطقي المنظم يجعله محتلا لمكان الصدارة في تاريخ تطور الرياضيات والمنطق الرياضي .

ان البرهان الذي اسوقه في هذا البحث على ان الخوارزمي هـو

اول من اقام حسابا منطقيا منظما في الجبر من شانه ان يضع الخوارزمي اول مؤسس للمنطق الرياضي ، مخالفا بذلك راى بوخنسكي الذي يبدأ في استعراضه للطريقة الرياضية المنطقية بما حققه ريماندوس لولوس (1232 ـ 1316) للبرهان على ان له الفضل في بناء حساب منطقي(51) ، ومما يدعم برهاني كذلك ان معظم عناصر مذهب لولوس ترجع الى اصول عربية، فمن المعروف انه درس اللغة العربية والعلوم التي كانت سائدة آنذاك في الاندلس ومناطق اخرى ، وكتب باللغة العربية بعض مؤلفاته الى جانب ما كتبه باللاتينية ، اما مذهبه المعروف بالفن الكبير(Ars Magna) فمتاثر بالمنطق والطريقة الارتباطية والجبر العربي ، ويقوم مذهبه على اساس لاهوتي وان جميع العلوم الطبيعية والقانونية والطبية والفلكية والهندسية مجرد تطبيقات لطريقة عامة وعلم واحد ، وان هذه الطريقة تسمح لنا باستنتاج كل الحقائق العلمية ضمن نظام يتالف من اوليات تترابط ميكانيكيا من اجل الحصول على النتائج .

ولم يحقق لولوس برنامجه ، وبقيت طريقته العامة التي ليست الا طريقة خوارزمية Algorithmus بينما حقق الخوارزمي من قبل برنامجه في ميدان الحساب والجبر ، لابد من الاشارة هنا الى ان الفن الكبير قد اطلق كذلك على الاعمال الجبرية « اذ نشر كاردانو C. Cardano سنة 1545 كتابه الفن الكبير ، وهو يمثل اهم عمل في الجبر في عصر النهضة الاوروبية »)(52) .

ويكتسب برهاني اهمية اذا علمنا ان الطريقة العامة في الفن الكبير للولوس قد اثرت بعد ذلك في تطور العلم والمنطق الرياضي ، فاشار اليهما توماس هوبز (1588 ـ 1679) وتاثر بهما الى حد كبير جوتفريد فلهلم لايبنتز (1646 ـ 1716) الذي يعد من ابرز علماء المنطق والرياضيات في العصر الحديث ، فكانت طريقته المعروفة باللغة العامة Characteristica Universalis وبرنامجه المنطقي العام امتدادا لتاثير لولوس وطريقته .

ان المرء ليدرك بوضوح اهمية الحساب والطريقة الخوارزمية في الرياضيات والمنطق الرياضي لان جميع المحاولات الرياضية الحديثة تنشد تحقيق هذين المنصرين ، بحيث يصبح من البساطة استنتاج جميع الحقائق الرياضية ولقد حقق الخوارزمي هذين المنصرين في بناء نظريته الجبرية ، وما علينا الا ان نبرهن على ذلك لا سيما واننا قد حللنا الطريقة الارتباطية ومعنى الالغوريثم « الخوارزمية » وغايتنا الان ان ننظر الى الجبر والمقابلة كنظام يؤلف حسابا منطقيا يوفر بابسط الطرق استنتاج حقائق جبرية وحلولا صحيحة للمعادلات من الدرجة الثانية باجراءات جبرية بسيطة .

نقصد بالحساب المنطقي ما ياتي :ـ

نظرية او نظام صوري يتالف من مفاهيم اساسية وتعريفات لبعض المفاهيم كما ينطوي من حيث الاساس على قواعد بنائية Rules of Formation تسمح ببناء قضايا او صيغ صحيحة البناء ، وقواعد تحويلية Rules of Transformation تسمح بالانتقال من صيغ مفروضة الى نتائج تلزم عن المقدمات بالضرورة (وفي حالة جبر الخوارزمي تعمل القواعد التحويلية على رد الاشكال المختلفة من معادلات الدرجة الثانية الى المقدمات المفروضة وهي الاشكال الرئيسة الستة) .

وفي ضوء هذا التعريف الحديث للحساب المنطقي مع الاشارة الى طريقة الرد الخوارزمية سنحاول تحليل كتاب الجبر والمقابلة بالتسلسل المنطقي لتفكير الخوارزمي في بناء نظريته الرياضية ، ومعنى ذلك ان نبدأ بالمفاهيم الاساسية اولا :ـ

اولا ـ المفاهيم الاساسية للنظرية

1 ـ مفاهيم حسابية : يذكر الخوارزمي الاعداد الطبيعية ويستعمل الكسور البسيطة والمركبة في المعادلات ، وهو في كل ذلك يتناول الاعداد الموجبة والكسور الموجبة ويذكر العدد صراحة عند تناوله لحدود المعادلة الجبرية(53) .

2 ـ مفاهيم جبرية : يذكر ذلك في قوله لتعيين حدود المعادلة « ووجدت الاعداد التي يحتاج اليها في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور واموال وعدد مفرد لا ينسب الى جذر ولا الى مال »(54) (لابد من الاشارة الى ان الخوارزمي يستعمل لفظة (مال) في كتابه بمعنيين الاول ويقصد به المعنى الجبري الاصطلاحي ، والثاني الذي يقصد به المبلغ ، كما يستعمل لفظة الشيء بمعنى الجذر في عدة مواضع من كتابه .)

3 ـ مفاهيم مشتركة : ونقصد بها تلك المفاهيم التي استخدمها الخوارزمي في علم الحساب وفي الجبر والمقابلة ، وقد وردت هذه المفاهيم عند صياغة المعادلات واجراء العمليات الجبرية لمعرفة المجهول في المعادلة ، فالكلمة (تعدل) في قوله مثلا « الاموال التي تعدل الجذور » والحرف (و) للدلالة على الاضافة او الجمع كما في قوله « اموال وجذور تعدل عددا » ويستعمل لفظة « زدت عليه » لتدل على الجمع كذلك . ويستعمل لفظة « ينقص » للدلالة على النقصان او الطرح كما يستعمل الفاظا للدلالة على الضرب والقسمة ، مثال ذلك خمسة في خمسة يكون خمسة وعشرين ، وعشرة قسمتها قسمين ، وبصورة عامة يستخدم الخوارزمي عدة الفاظ لغوية اخرى للدلالة على الجمع والنقصان والضرب والقسمة.

4 ـ تعريفات : ونظرا لما يقتضيه البحث في حدود الجبر فان الخوارزمي يعرف حدود المعادلة الجبرية لتقريب معانيها الى الذهن ، وهي تعريفات لا تختلف كثيرا في وظيفتها عن تعريفات اقليدس للمفاهيم الهندسية « فالجذر منها كل شيء مضروب في نفسه من الواحد وما فوقه من الاعداد وما دونه من الكسور ، والمال كل ما اجتمع من الجذر المضروب في نفسه ، والعدد المفرد كل ملفوظ به من العدد بلا نسبة الى جذر ولا الى مال »(55) .

ولتقريب هذه المفاهيم جميعا من لغة الجبر الحديث نقول :ـ

ان الاعداد الطبيعية والكسور من المفاهيم الحسابية المستخدمة في حساب الجبر والمقابلة ، ويقصد بالاعداد الطبيعية من الواحد وما فوقه من الاعداد (1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 .... ن) ويقصد بالكسور ما هو دون الواحد او اجزاء الواحد ($\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ......) ومن الكسور ما يجمع بين العدد الطبيعي والكسر البسيط ($1\frac{1}{2}$ ، $2\frac{3}{4}$ ..)

وهي الكسور المركبة .

اما المفاهيم الجبرية فان الجذر او الشيء هو ما نشير اليه بالحرف س وان المال هو ما نشير اليه بالرمز س2 ، ونستخدم الرموز الآتيــة للدلالة على المفاهيم المشتركة بين الحساب والجبر :ـ

يعدل ، =
جمع ، + ، نقصان − ، ضرب × ، قسمة ÷
كما سنحتاج الى علامة الجذر التربيعي √‾ عندما ننتقل من س 2 الى س ا و من المال الى جذره .

ولما كانت الاعداد التي نقرنها بحدود المعادلة متغيرة ، فمن الضروري ان نختار ثلاثة رموز مختلفة هي ا ، ب ، جـ حيث يظهر ا مع المال و ب مع الجذر وجـ بلا نسبة الى مال او جذر .

وبناء على ما تقدم تكون المفاهيم او الحدود لحساب الجبر والمقابلة بالصورة النهائية كما يأتي :ـ

اموال وجذور واعداد وكسور ومساواة وجمـع ونقصــان وضرب وقسمة وجذر تربيعي .

ثانيا ـ تحتوي المعادلة الخوارزميـــة على طرفين همـا الطرف الايمن والطرف الايسر ، وتربط بينهما المساواة للدلالة على تعادل الطرفين في القيمة ، وبالصيغة الرمزية تكون صورة المعادلة « . . . . = ... » فاذا كانت حدود حساب الجبر والمقابلة ثلاثة هي المال والجـــذر والعدد المفرد ، فان الصيغ الصحيحة البناء التي تمليها قواعد بناء الحساب المنطقي يجب ان تكون على مجموعتين

المجموعة الاولى ـ وتضـم الصيغ التي تحتوي على حدين فقط فاذا ما استخدمت الطريقة الارتباطية نحصل على ست صور للمعادلات .

1 ـ اموال تعدل جذورا
اموال تعدل عددا
جذور تعدل عددا

2 ـ جذور تعدل اموالا
عدد يعدل اموالا
عدد يعدل جذورا

لا شك ان الخوارزمي قد ادرك بوضـــوح ان المجموعة (1) لا تختلف عن المجموعة (2) من الناحيه الجبرية ، لان المعادلة واحدة سواء كانت اموالا تعدل جذوراً ، او جذورا تعدل اموالا وكذلك تكون المعادلة واحدة بالنسبة للبقية .

واخيرا فان ما توفره الطريقة الارتباطيـــة هــو ثلاث صيغ صحيحة البناء لهذا النوع من المعادلات .

ويبين هذه الصيغ بقوله « فمن هذه الضروب الثلاثة ما يعدل بعضها بعضا وهو كقولك اموال تعدل جذورا ، واموال تعدل عددا ، وجذور تعدل عددا »(56) .

وباستخدام طريقـــة التدوين الرمزي في الجبر نحصل على اشكال المعادلات بالصور الآتية :ـ

ا س 2 = ب س
ا س 2 = جـ
ب س = جـ

المجموعة الثانية ـ وتضم الصيغ التي تحتـوى على ثلاثـة حدود مختلفة في كل معادلة ، ولقد استخــدم الخوارزمي الجمـــع والمساواة لربط هذه الحدود بعضها ببعض فاذا ما استخدمت الطريقة الارتباطية فان ما نحصل عليه من اشكال يكون اثنى عشر صورة حسب الجدول الآتي :ـ

1 ـ اموال وجذور تعدل عددا
اموال وعدد تعدل جذورا
جذور وعــدد تعدل اموالا

2 ـ عــدد يعدل اموالا وجذورا
جذور تعدل اموالا وعــددا
اموال تعدل جذورا وعددا

3 ـ جذور واموال تعدل عــددا
عــدد واموال تعدل جذورا
عــدد وجذور تعدل أموالا

4 ـ عــدد يعدل جذورا واموالا
جذور تعدل عــددا واموالا
اموال تعدل عــددا وجذورا

وبالاستناد الى مبدأ المعادلة ، فان الاشكال الواردة في (2) لا تختلف عن الاشكال في (1) ، كمـــا ان الاشـــكال الواردة في (4) لا تختلف عن الاشكال في (3) ، وبذلك تبقى ستة اشكال .

ولقد بين الخوارزمي من خلال حلوله لبعض المعـــادلات بردها الى ثلاثة اشكال اساسية ، لان الاشــكال في (3) ترد الى الاشكال في (1) ، وهكذا تبقى ثلاثة اشكال اساسية ذكرها الخوارزمي بالنص : « ووجدت هذه الضروب الثلاثة ، التي هي الجذور والاموال والعدد ، تقترن فيكون منها ثلاثة اجناس مقترنة وهي اموال وجذور تعدل عددا ، واموال وعدد تعدل جذورا ، وجذور وعدد تعدل اموالا »(57) .

وباستخدام طريقة التدوين الرمزي الجبرية نحصل على الاشكال الجبرية الآتية لمعادلات الخوارزمي الاساسية :ـ

ا س 2 + ب س = جـ
ا س 2 + جـ = ب س
ب س + جـ = ا س 2

ومن المجموعة الاولى والثانيـــة يكون مجموع الصيغ او الاشــكال الجبرية الستة التي ترد اليها الاشكال الاخرى للمعادلات ، ثلاثة منهـــا تستخدم حدين من حساب الجبر والمقابلة في كل معادلة ، وثلاثة اخـرى تستخدم ثلاثة حدود في كل معادلة .

ثالثا ـ يحتوي حساب الجبر والمقابلة على مجموعة من البديهيات وقوانين جبرية وحسابية وقواعد للتحويل والاستنتاج ، ولا نقصد هنـــا بالبديهيات ان الخوارزمي ذكرها صراحة بين مقدماته ، بل نجدها واضحة من خلال الحلول الجبرية ، ففي طريقة جبر المعادلة نجـــد لبديهية الاضافة دورا مهما ، كما نجد في طريقـــة المقابلة تطبيقـا لبديهية الطرح ، مثال ذلك :ـ

10 س − س 2 = 21
10 س − س 2 + (س 2) = 21 + (س 2)

الجبر هنا باضافة س 2 الى طرفي المعادلة وهنا نجد البديهية التالية تطبيقا : « اذا اضيفت كميات متساوية الى اخرى متساوية تكون

النتائج متساوية » .

وبذلك نحصل على النتيجة الآتية :ـ

10 س = 21 + س 2

اما بديهية الطرح فانها نجد لها تطبيقا في حل المعادلة الآتية

س 2 + 5 س = 7 س

س 2 + 5 س − (5 س) = 7 س − (5 س)

وذلك بطرح (5 س) من طرفي المعادلة بالاستناد الى بديهية الطرح « اذا طرحت كميات متساوية من اخرى متساوية تكون النتائج متساوية » .

وبذلك نحصل على النتيجة الآتية :ـ

س 2 = 2 س

وبالاضافة الى البديهيتين المذكورتين نجد مجموعة مهمة من القوانين الحسابية والجبرية ، واول هذه القوانين ما يعتبره الخوارزمي متساويا :

اموال وجذور = جذور واموال
اموال وعدد = عدد واموال
جذور وعدد = عدد وجذور

فاذا اتخذنا من الحروف س ، ص ، ع ، م رموزا تشير الى مقادير جبرية او حسابية ، فان تفكير الخوارزمي المنطقي يعترض القانون التبديلي Commutative Law للجمع :ـ

(1) س + ص = ص + س

ومن خلال العمليات الجبرية لحل المعادلات يفترض تفكير الخوارزمي المنطقي قانونا مهما في الجبر ينص :ـ

(2) س × س = س 2

بغض النظر عن مقدار س سواء كان بسيطا او مركبا مثال ذلك :ـ

5 × 5 = 25

(10 − س)2 = (10 − س) (10 − س)

ويلخص في باب الضرب مجموع العمليات بقوله : « وانا مخبرك كيف تضرب الاشياء وهي الجذور بعضها في بعض اذا كانت منفردة ، او كان معها عدد ، او كان مستثنى منها عدد ، او كانت مستثناة من عدد ، وكيف تجمع بعضها الى بعض ، وكيف تنقص بعضها من بعض »(58) .

ينطوي هذا القول على ابرز العمليات الجبرية التي سناتي على تثبيتها ، والتي يذكرها الخوارزمي بترتيب منطقي منظم :ـ

1 ـ قاعدة ضرب الاعداد :

« لابد لكل عدد يضرب في عدد من ان يضاعف احد العددين بقدر ما في الاخر من الاحاد »(59) مثال ذلك ان ضرب العدد ثلاثة في العدد اربعة لنحصل على العدد اثني عشر .

2 ـ قاعدة التوزيع في الضرب :

« اذا كانت عقود ومعها آحاد او مستثنى منها آحاد فلابد من ضربها اربع مرات ، العقود في العقود والعقود في الاحاد ، والاحاد في العقود والاحاد في الاحاد »(60) .

تنطوي هذه القاعدة على عدة حقائق حسابية ، وفيها يبرهن الخوارزمي على فهم رياضي مبدع ، خاصة اذا علمنا ان هذه القاعدة هي الصحيحة في الرياضيات الحديثة ، ولتوضيح ذلك ندرج الحالات الممكنة في الضرب كما ياتي :ـ

الحالة الاولى :

اذا اردنا ان نضرب 12 × 11 ، فان كل عدد منهما يتحلل بالنسبة للخوارزمي الى عقود وآحاد ، ويضرب بالطريقة الآتية :ـ

(10 + 2) (10 + 1)

الحالة الثانية :

اذا اردنا ان نضرب 8 × 9 فان كل عدد منهما يتحلل الى عقود وآحاد مستثناة بالطريقة الآتية :ـ

(10 − 2) (10 − 1)

الحالة الثالثة :

اذا اردنا ان نضرب 12 × 9 فان العدد الاول والعدد الثاني يتحللان بالطريقة الانفة الذكر في حالة الايجاب وحالة الاستثناء او السلب بالطريقة الآتية :ـ

(10 + 2) (10 − 1)

وتتم عملية الضرب استنادا الى القاعدة السابقة مع مراعاة العلامات في حالة الزيادة والنقصان ، ويصف ذلك بقوله :ـ

« فاذا كانت الاحاد التي مع العقود زائدة جميعا فالضرب الرابع زائد ، واذا كانت ناقصة جميعا فالضرب الرابع زائد ايضا ، واذا كان احدهما زائدا والاخر ناقصا فالضرب الرابع ناقص »(61) .

في هذا القول قاعدة جبرية وحسابية مهمة هي قاعدة ضرب العلامات والتي يمكن عرضها على هيئة عامة كما ياتي :ـ

+ س × + ص = + س ص
− س × − ص = + س ص
+ س × − ص = − س ص
− س × + ص = − س ص

وبناء على ما تقدم تكون نتائج الضرب للحالات الثلاثة كما ياتي :ـ

بالنسبة للحالة الاولى : 100 + 10 + 20 + 2 = 132
بالنسبة للحالة الثانية : 100 − 10 − 20 + 2 = 72
بالنسبة للحالة الثالثة : 100 − 10 + 20 − 2 = 108

ولم يقصر تطبيق هذه القواعد على الحساب ، بل عمل على تطبيقها في عمليات الجبر وعندما تكون المقادير جبرية وحسابية ، وبذلك يقول « وانما بينت ذلك لتستدل به على ضرب الاشياء بعضها في بعض اذا كان معها عدد او استثنيت من عدد او استثنى منها عدد » وبذلك نحصل على ما ياتي :ـ

(10 + س) (10 + س) = 100 + 10س + 10س + س2
(10 − س) (10 − س) = 100 − 10س − 10س + س2
(10 + س) (10 − س) = 100 − 10س + 10س − س2

وهكذا يمكن القول ان القاعدة التوزيعيـــة في تفكيـر الخوارزمي المنطقي تفترض قانونا توزيعيا Distributive Law للحســاب والجبر ومن خلال الامثلة التي يسوقها في العمليات الجبرية لحــل المعادلات .

وفي ضوء ما تقدم نستطيع القــول ان منطق الخوارزمي يفترض الصور الآتية للقوانين التوزيعية :ـ

(3) س (ص + ع) = س ص + س ع

مثال ذلك :ـ

س (10 + 5 س) = 10 س + 5 س 2

(4) س (ص − ع) = س ص − س ع

مثال ذلك :ـ

(10 − س) ($\frac{1}{2}$ − 5 س) = 5 − 50 س − $\frac{1}{2}$ س + 5 س 2

(5) (س + ص) (ع + م) = س ع + س م + ص ع + ص م

مثال ذلك :ـ

(10 + س) (100 + 2س) = 1000 + 10 + 100س + 2س2

(6) (س − ص) (ع − م) = س ع − س م − ص ع + ص م

مثال ذلك :ـ

(10 − س) ($\frac{1}{2}$ − 5 س) = 5 − 50 س − $\frac{1}{2}$ س + 5 س2

(7) (س + ص) (ع − م) = س ع − س م + ص ع − ص م

مثال ذلك :ـ

(10 + $\frac{1}{2}$ س) ($\frac{1}{2}$ − 5 س) = 5 − 50 س + $\frac{1}{4}$ س

− $\frac{1}{2}$ 2 س2

3 ـ قاعدة رد الاموال الى مال واحد

تعتبر هذه القاعدة من القواعد المهمة في حل المعادلات جبريا وهندسيا في كتاب الجبر والمقابلة ، ولقد ذكرها الخوارزمي في مواضع كثيرة من كتابه عندما تكون الاموال في المعادلة ما كثر منها او قل ، فترد الى مال واحد .

وسنأتي على ذكر نصوص عملية رد الاموال الى مال واحد في الفقرة السابقة من هذا البحث ، وتنحصر مهمتنا الان في صياغة القــوانين الجبرية التي يعتمد عليها في رد الاموال الى مال واحد .

ينص القانون الجبري الاول : اذا ما ضرب طرفا المعادلــة بمقــدار واحد فان النتائج تكون متساوية .

اذا افترضنا س = ص (المعادلة)

فان م س = م ص

مثال ذلك :ـ

$\frac{1}{2}$ س2 = 8

2 × $\frac{1}{2}$ س2 = 2 × 8

س2 = 16

وينص القانون الجبري الثاني : اذا ما قسم طرفا المعادلة على مقدار واحد فان النتائج تكون متساوية .

اذا افترضنا س = ص (المعادلة)

(9) فان $\frac{ص}{م}$ = $\frac{ص}{م}$

مثال ذلك :ـ

4 س2 = 16

$\frac{4 س 2}{4}$ = $\frac{16}{4}$

س2 = 4

4 ـ قاعدة الجبر والمقابلة :

يستخدم الخوارزمي هذه القاعدة في حل المعادلات وهي تقــوم من حيث الاساس على تبديل Transposition او نقــل احــد حدود المعادلة من طرف الى طرف آخر . وتعتمد عملية جبر المعادلة عندما يكون فيها استثناء او نقصان على بديهية الاضافة ، بينمـا تعتمد المقابلة على بديهية الطرح .

(10) س = ص − ع   مثال ذلك : 3 س2 = 100 − 2 س2

س + ع = ص   3 س2 + 2 س2 = 100

(11) س = ص + ع   مثال ذلك : 5 س2 = 24 س + 4 س2

س − ع = ص   5 س2 − 4 س = 24 س

5 ـ قاعدة ضرب الاعداد بالاشياء والاموال(63)

في حالة ضرب العــدد في الشيء او الاشياء فان الناتج يكون اموالا

مثال ذلك : 2 × س2 = 2 س

$\frac{2}{3}$ × 3 س2 = 2 س2

فاذا اعتبرنا س اي مقدار سواء كان عدديا او شيئا او مالا ورمزنا الى العدد الذي يضرب في المقدار بالحرف أ ، فاننــا نحصــل على القاعدة التالية :ـ

(12) أ × س = أ س

6 ـ قاعدة ضرب الجذور التربيعية :

« وان اردت ان تضرب جذر تسعة في جذر اربعة ، فاضرب تسعـة

في اربعة فيكون ستة وثلاثين فخذ جذرها وهو ستة فهو جذر تسعة مضروب في جذر اربعة »(64) .

$$\sqrt{9} \times \sqrt{4} = \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$$

وكقاعدة عامة لضرب الجذور نحصل على الصياغة الجبرية الآتية :

$$(13) \quad \sqrt{\text{س}} \times \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{س ص}}$$

« واعلم ان كل جذر مال معلوم او اصم تريد ان تضعفه ومعنى اضعافك اياه ان تضربه في اثنين ، فينبغي ان تضرب ذلك المال وان اردت ثلاثة امثاله فاضرب ثلاثة في ثلاثة ثم في المال فيكون جذر ما اجتمع ثلاثة امثال جذر ذلك المال الاول وكذلك ما زاد من الاضعاف او نقص فعلى هذا المثال نفسه »(65) .

$$2 \times \sqrt{9} = \sqrt{2 \times 2 \times 9} = \sqrt{36}$$

$$3 \times \sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3 \times 9} = \sqrt{81}$$

وكقاعدة عامة لضرب الاعداد في الجذر التربيعي نحصل على ما ياتي :ـ

$$(14) \quad \text{أ} \times \sqrt{\text{س}} = \sqrt{\text{أ}^2\text{س}}$$

7 ـ قاعدة الجمع والنقصان :

تجمع الاجناس المتشابهة بعضها الى بعض او يطرح بعضها من بعض ، الاعداد مع الاعداد ، والاشياء مع الاشياء ، والاموال مع الاموال ، والجذور التربيعية مع الجذور التربيعية ، ومن ابرز الامثلة التي يذكرها الخوارزمي على قاعدة الجمع والنقصان ما ياتي :ـ

$$(100 + \text{س}^2 - 20\ \text{س}) + (50 + 10\ \text{س} - 2\ \text{س}^2) =$$

$$100 + 50 + \text{س}^2 - 2\ \text{س}^2 - 20\ \text{س} + 10\ \text{س} =$$

$$150 - \text{س}^2 - 10\ \text{س}$$

والمثال الثاني :ـ

$$(\sqrt{200} - 10) - (20 - \sqrt{200})$$

$$\sqrt{200} - 10 - 20 + \sqrt{200}$$

$$\sqrt{200} + \sqrt{200} - 30$$

$$2\sqrt{200} - 30$$

$$\sqrt{2 \times 2 \times 200} - 30$$

$$\sqrt{800} - 30$$

8 ـ قاعدة القسمة :

اذا قسمت عددا على عدد فان الناتج يكون عددا ، واذا قسمت الاشياء على عدد ، فان الناتج يكون اشياء ، واذا قسمت اشياء على اشياء ، فان الناتج يكون عددا ، واذا قسمت الاموال على الاشياء ، فان الناتج يكون اشياء :

مثال ذلك : $\frac{4}{2} = 2$ ، $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

$$\frac{4\ \text{س}}{2} = 2\ \text{س} \text{ ، } \frac{6\ \text{س}}{2\ \text{س}} = 3$$

$$\frac{4\ \text{س}^2}{2\ \text{س}} = 2\ \text{س}$$

« ان اردت ان تقسم جذر تسعة على جذر اربعة فانك تقسم تسعة على اربعة فيكون اثنين وربعا فجذرها هو ما يصيب الواحد وهو واحد ونصف »(66) . . .

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$$

(15) وكقاعدة عامة $\frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}} = \sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ص}}}$

« واعلم بان كل شيئين تقسم هذا على هذا وهذا على هذا فانك اذا ضربت الذي يخرج من هذا الذي يخرج من هذا كان واحدا ابدا »(67) ويمكن التعبير عن هذه القاعدة العامة بالصيغة الآتية :ـ

$$(16) \quad \frac{\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 1$$

مثال ذلك : $\frac{\text{س}}{\text{س} + 2} \times \frac{\text{س} + 2}{\text{س}} = 1$

واستخدم الخوارزمي في عدة مواضع القاعدة المعروفة : حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين .

$$(17) \quad \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{م}} = \text{س م} = \text{ص ع}$$

مثال ذلك :

$$\frac{\text{س}}{\text{س} + 2} = \frac{1}{2} \text{ ، } 2\ \text{س} = \text{س} + 2$$

6 ـ تبين لنا الان بوضوح لا يقبل الشك ان جبر الخوارزمي يؤلف حسابا منطقيا بكل معنى الكلمة ، وانه استهدف من حيث الاساس بناء نظام متكامل للمعادلات من الدرجة الثانية ، بحيث يمكن حل كل معادلة من الجنس نفسه باحدى الطرق المقترحة مع مراعاة مجموع القواعد والقوانين الحسابية والجبرية ، وغايتنا الان ان نتعرض بالتحليل لنقطة منطقية اخرى في منطق الخوارزمي مكملة للحساب المنطقي ، هي طريقة رد المعادلات والمقصود بالرد هنا البرهان على أن جميع الاوجه لمعادلات الدرجة الثانية ترجع الى الاشكال الستة الرئيسة ، ونذكر هنا قوله للدلالة على اهتمامه بالرد :ـ

«ووجدنا كل ما يعمل به من حساب الجبر والمقابلة لابد ان يخرجك الى احد الابواب الستة التي وصفت في كتابي هذا وقد اتيت على تفسيرها فاعرف ذلك »(68) .

كما يخضع حل جميع اوجه المعادلات من الدرجة الثانية الى الطرق نفسها التي ثبتها لحساب الجبر والمقابلة .

ان طريقة الرد من الطرق المنطقية المعروفة ، قد استخدمها ارسطو للبرهان على صحة الاقيسة وذلك بارجاع كل قياس ناقص الى احد الاقيسة التامة الصحيحة من الشكل الاول باستخدام قواعد وقوانين استنتاجية معينة ، وطريقة الرد الخوارزمية ذات اهمية في المنطق والرياضيات معا ، لانها من حيث المبدأ تفترض اشكالا اساسية معينة وحلولا معروفة لها ، وان اية معادلة من الدرجة الثانية مختلفة الشكل لابد ان ترد اولا الى احد الاشكال الستة ثم يجرى الحل بالطريقة الخوارزمية ثانيا .

ان طريقة الرد الخوارزمية تبرهن بصورة منطقية صحيحة على قدرة الحساب المنطقي للجبر والمقابلة على توفير الحلول المناسبة واكتشاف المجهول بطريقة بسيطة وضمن امكانات الحساب المنطقي بما فيه من اشكال رئيسة وقواعد وقوانين جبرية وحسابية لتحويل المعادلة المطروحة الى الصورة التي عليها احدى المعادلات الستة، ولاجل توضيح ذلك نأخذ بعض الامثلة التي يسوقها الخوارزمي لهذا الغرض بالذات :-

المثال الاول :

« نحو قولك عشرة قسمتها قسمين فضربت احد القسمين في الاخر ثم ضربت احدهما في نفسه فصار المضروب في نفسه مثل احد القسمين في الاخر اربع مرات ، فقياسه ان تجعل احد القسمين شيئا والاخر عشرة الا شيئا فتضرب شيئا في عشرة الا شيئا فتكون عشرة اشياء الا مالا ثم تضربه في اربعة لقولك اربع مرات فيكون اربعة امثال المضروب من احد القسمين والاخر فيكون ذلك اربعين شيئا الا اربعة اموال فاجبرها بالاربعة الاموال وزدها على المال فيكون اربعين شيئا تعدل خمسة اموال ، فالمال الواحد يعدل ثمانية اجذار وهو اربعة وستون جذرها ثمانية وهو احد القسمين المضروب في نفسه والباقي من العشرة اثنان وهو القسم الاخر **فقد اخرجتك هذه المسالة الى احد الابواب الستة وهي اموال تعدل جذورا فاعلم ذلك »(69) .**

وباستخدام طريقة التدوين الجبري لعرض الحل من قوله فقياسه ان تجعل ... الخ ، نحصل على ما ياتي :

س ، 10 − س (فروض)

س (10 − س) = 10 س − 4 س2 (4)

4 (10 س − س2) = 40 س − 4 س2 (4)

س × س = س2 (2)

س2 = 40 س − 4 س2 (المعادلة)

وباستخدام طريقة الجبر التي وردت في قوله « فاجبرها ... الخ » نحصل على ما ياتي :-

س2 + 4 س2 = 40 س − 4 س2 + 4 س2 (بديهية الاضافة)

س2 + 4 س2 = 4 س (10)

5 س2 = 40 س (قاعدة الجمع)

وهذه اموال تعدل جذورا

س = 8 والقسم الاخر 10 − 8 = 2

المثال الثاني :

« عشرة قسمتها قسمين فضربت كل قسم في نفسه ثم ضربت العشرة في نفسها فكان ما اجتمع من ضرب العشرة في نفسها مثل احد القسمين مضروبا في نفسه مرتين وسبعة اتساع مرة او مثل الاخر مضروبا في نفسه ست مرات وربع مرة ، فقياس ذلك ان تجعل احد القسمين شيئا والاخر عشرة الا شيئا فتضرب الشيء في نفسه فيكون مالا ثم في اثنين وسبعة اتساع فيكون مالين وسبعة اتساع مال فاردده الى مال واحد وهو تسعة اجزاء من خمسة وعشرين جزءا وهو خمس واربعة اخماس الخمس فخذ الخمس المائة واربعة اخماس خمسها وهو ستة وثلاثون تعدل اموالا فخذ جذرها ستة وهو احد القسمين والاخر اربعة لا محالة فقد اخرجتك هذه المسالة الى احد الابواب الستة وهي اموال تعدل عددا »(70) .

وباستخدام طريقة التدوين الجبري لعرض الحل من قوله : « فقياس ذلك ان تجعل ... الخ » نحصل على ما ياتي :

س 10 − س (فروض)

س × س = س2 (2)

10 × 10 = 100 (2)

س2 × 2 7/9 = 2 7/9 س2 (12)

100 = 2 7/9 س2 (اموال تعدل عدداً)

100/5 + 4/5 × 100/5 = س2 (8)

36 = س2

س = 6 والقسم الاخر 10 − 6 = 4

المثال الثالث :

« عشرة قسمتها قسمين ثم قسمت احدهما على الاخر فخرج القسم اربعة ، فقياس ذلك ان تجعل احد القسمين شيئا والاخر عشرة الا شيئا ثم تقسم عشرة الا شيئا على شيء ليكون اربعة وقد علمت انك متى ما ضربت ما اخرج لك من القسم في المقسوم عليه

عاد المال الذي قسمته والقسم في هذه المسالة اربعة والمقسوم عليه شيء فاضرب اربعة في شيء فيكون اربعة اشياء تعدل المال الذي قسمته وهو عشرة الا شيئا فاجبر العشرة بالشيء وزده على الاربعة الاشياء فيكون خمسة اشياء تعدل عشرة فالشيء الواحد اثنان وهو احد القسمين فقد اخرجتك هذه المسالة الى احد الابواب الستة وهي جذور تعدل عددا »(71) .

وباستخدام الطريقة الرمزية لعرض الحل من قوله « فقياس ذلك ان تجعل ... الخ » نحصل على ما ياتي :ـ

$\text{س} ، 10 - \text{س}$ (فروض)

$\frac{10 - \text{س}}{\text{س}} = 4$ (المعادلة)

$4\,\text{س} = 10 - \text{س}$ (17)

$4\,\text{س} + \text{س} = 10 - \text{س} + \text{س}$ (بديهية الاضافة)

$5\,\text{س} = 10$ (10 ، قاعدة الجمع) (جذور تعدل عددا)

$\text{س} = 2$

المثال الرابع :

« مال ضربت ثلثه ودرهما في ربعه ودرهم فكان عشرين قياسه ان تضرب ثلث شيء في ربع شيء فيكون نصف سدس مال وتضرب درهما في ثلث شيء فيكون ثلث شيء ودرهما في ربع شيء بربع شيء ودرهما في درهم بدرهم فذلك كله نصف سدس مال وثلث شيء وربع شيء ودرهم تعدل عشرين درهما فالق من العشرين درهما بدرهم فتبقى تسعة عشر درهما تعدل نصف سدس مال وثلث شيء وربع شيء فكمل مالك واكماله ان تضرب كل ما معك في اثنى عشر فيصير معك مال وسبعة اجذار تعدل مائتين وثمانية وعشرين درهما ، فنصف الاجذار واضربها في مثلها تكن اثنتي عشر وربعا فزدها على الاعداد وهي مائتين وثمانية وعشرين فيكون مائتين واربعين وربعا فخذ جذرها خمسة عشر ونصفا فانقص منه نصف الاجذار وهو ثلاثة ونصف يبقى اثنى عشر وهو المال فقد اخرجتك هذه المسالة الى احد الابواب الستة وهي اموال وجذور تعدل عددا »(72) . وبطريقة التدوين الجبري لعرض الحل من قوله « قياسه ان تضرب ... الخ »

نحصل على ما ياتي :ـ

$(\frac{1}{3}\text{س} + 1)(\frac{1}{4}\text{س} + 1) = 20$ (المعادلة)

$\frac{1}{12}\text{س}^2 + \frac{1}{3}\text{س} + \frac{1}{4}\text{س} + 1 = 20$ (5)

$\frac{1}{12}\text{س}^2 + \frac{1}{3}\text{س} + \frac{1}{4}\text{س} + 1 - 1 = 20 - 1$ (بديهية الطرح)

$\frac{1}{12}\text{س}^2 + \frac{1}{3}\text{س} + \frac{1}{4}\text{س} = 19$ (قاعدة الجمع والنقصان)

$\text{س}^2 + 4\,\text{س} + 3\,\text{س} = 228$ (8)

$\text{س}^2 + 7\,\text{س} = 228$ (اموال وجذور تعدل عددا)

وبتطبيق طريقة الدستور التي يصفها للحل من قوله « فنصف الاجذار واضربها .. الخ » نحصل على ما ياتي :ـ

$\text{س} = \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 228} - \frac{7}{2}$

$\text{س} = \sqrt{\frac{49}{4} + 228} - \frac{7}{2}$

$\text{س} = \sqrt{12\frac{1}{4} + 228} - \frac{7}{2}$

$\text{س} = \sqrt{240\frac{1}{4}} - \frac{7}{2}$

$\text{س} = 15\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$

$\text{س} = 12$

المثال الخامس :

« عشرة قسمتها قسمين ثم ضربت كل قسم في نفسه وجمعتها فكانا ثمانية وخمسين درهما ، قياسه ان تجعل احد القسمين شيئا والاخر عشرة الا شيئا فاضرب عشرة الا شيئا في مثلها فيكون مائة ومالا الا عشرين شيئا ثم تضرب شيئا في شيء فيكون مالا ثم تجمعها فيكون ذلك مائة ومالين الا عشرين شيئا تعدل ثمانية وخمسين درهما فاجبر المائة والمالين بالعشرين الشيء الناقصة وزدها على الثمانية والخمسين فيكون مائة ومالين تعدل ثمانية وخمسين درهما وعشرين شيئا فاردد ذلك الى مال واحد وهو ان تاخذ نصف ما معك فيكون خمسين درهما ومالا تعدل تسعة وعشرين درهما وعشرة اشياء فقابل به وذلك انك تلقي من الخمسين تسعة وعشرين فيبقى احد وعشرون ومال تعدل عشرة اشياء فنصف الاجذار يكون خمسة واضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين فالق منها الواحد والعشرين التي مع المال فيبقى اربعة فخذ جذرها وهو اثنان فانقصه من نصف الاجذار التي هي خمسة يبقى ثلاثة وهي احد القسمين والاخر سبعة فقد اخرجتك هذه المسالة الى احد الابواب الستة وهي اموال وعدد تعدل جذورا »(73) .

وبطريقة التدوين الجبري لعرض الحل من قوله « قياسه ان تجعل ... الخ » نحصل على ما ياتي :ـ

$$\text{س}^2 + (10 - \text{س})^2 = 58 \qquad \text{(المعادلة)}$$

$$\text{س}^2 + (100 + \text{س}^2 - 20\,\text{س}) = 58 \;(2 \text{ ، } 6) \qquad \text{(قاعدة الجمع)}$$

$$2\,\text{س}^2 + 100 - 20\,\text{س} = 58 \qquad \text{(قاعدة الجمع)}$$

$$2\,\text{س}^2 + 100 - 20\,\text{س} + 20\,\text{س} = 58 + 20\,\text{س} \qquad \text{(بديهية الاضافة)}$$

$$2\,\text{س}^2 + 100 = 58 + 20\,\text{س} \qquad (10)$$

$$\text{س}^2 + 50 = 29 + 10\,\text{س} \qquad (9)$$

$$\text{س}^2 + 50 - 29 = 29 - 29 + 10\,\text{س} \qquad \text{(بديهية الطرح)}$$

$$\text{س}^2 + 21 = 10\,\text{س} \qquad (11) \qquad \text{(اموال وجذور تعدل عددا)}$$

باستخدام قاعدة الدستور نحصل على ما ياتي :ـ

$$\text{س} = \frac{10}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21}$$

$$\text{س} = 5 \mp \sqrt{25 - 21}$$

$$\text{س} = 5 \mp 2$$

$$\text{س} = 3 \text{ ، } \text{س} = 7$$

المثال السادس :

« (مال) ضربت ثلثه في ربعه فعاد (المال) وزيادة اربعة وعشرين درهما فقياسه ان تجعل مالك شيئا ثم تضرب ثلث شيء في ربع شيء فيكون نصف سدس مال تعدل شيئا واربعــة وعشرين درهما ثم تضرب نصف سدس المال في اثني عشر حتى تكمل مالك واضـرب الشيء في اثني عشر يكن اثنى عشر شيئا واضرب الاربعة والعشرين في اثني عشر فيصير معك مائتان وثمانية وثمانون درهما وزدها على مائتين وثمانية وثمانين فيكون ثلثمائة واربعة وعشرين فخذ جذرها وهو ثمانية عشر فزده على نصف الاجذار وهي ستة فيكون ذلك اربعة وعشرين وهو (المال) فقد اخرجتك هذه المسئلة الى احــد الابواب الستة وهي جذور وعدد تعدل اموالا »(74) .

وبطريقة التدوين الجبري لعرض الحـل من قولـه « فقياســه ان تجعل . . . الخ » نحصل على ما ياتي :ـ

$$\frac{1}{3}\,\text{س} \times \frac{1}{4}\,\text{س} = \text{س} + 24 \qquad \text{(المعادلة)}$$

$$\frac{1}{12}\,\text{س}^2 = \text{س} + 24 \qquad \text{(قاعدة الضرب ، 3)}$$

$$12 \times \frac{1}{12}\,\text{س}^2 = 12\,(\text{س} + 24) \qquad (8)$$

$$\text{س}^2 = 12\,\text{س} + 288 \qquad \text{(جذور وعدد تعدل اموالا)}$$

وبتطبيق قاعدة الدستور نحصل على ما يلي :ـ

$$\text{س} = \frac{12}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 288}$$

$$\text{س} = 6 \mp \sqrt{36 + 288}$$

$$\text{س} = 6 \mp \sqrt{324}$$

$$\text{س} = 6 \mp 18$$

$$\text{س} = 24 \text{ ، } (\text{س} = -12)$$

7 ـ ولابد للمرء ان يتساءل وهو يتابع حل الخوارزمي لمعادلات الدرجة الثانية بطريقة الدستور عن الطريقــة التي سلكها والاساس الذي اعتمد عليه في اشتقاق قاعدة او قواعد الدستور وهل في عمله هذا اصالة وابتكار ؟ ان الاجابة على هذا السؤال تفرض علينا ان نناقش اولا خطوته الاولى في تبسيط المعادلة لتكون جاهزة لتطبيق قاعدة الدستور ، فالمعادلات او الاشكال الرئيســة الستة تحتوي على حدود ، يقترن بالمال وبالجذر عدد ، بينما يظهر عدد مفرد لا ينسب الى المال ولا الى الجذر ، يلجأ الخوارزمي الى التخلص من العوامل العددية المقترنة بالاموال ، بحيث تتحول الى مال واحد ويستخدم من أجل ذلك قانون ضرب طرفي المعادلة بقيمة عددية واحـدة ، او قانون قسمة طرفي المعادلة بقيمة عددية واحدة ، ثم يطبق بعــدها طريقة الدستور ، ويذكر طريقته في رد الاموال الى مال واحـد في عدة مواضع هامة من كتابه فهو يقول بالنسبة للمعادلة : أ س = ب س : « وكذلك ما كثر من الاموال او قل يرد الى مال واحد وكذلك يفعل بما عادلها من الاجذار يرد الى مثل ما يرد اليه المال »(75) . ويصدق الشيء نفسه بالنسبة للمعادلة أ س2 = جـ : « وكـذلك جميع الاموال زائدها وناقصها ترد الى مال واحد ، وان كانت اقل من مال زيد عليها حتى تكمل مالا تاما وكذلك يفعــل بما عادلها من الاعداد »(76) .

ويطبــق المبدأ نفســـه بالنسبة للمعادلـة أ س2 + ب س = جـ « وكذلك لو ذكر ثلاثة او اقل او اكثر فاردده الى مال واحد واردد ما كان معه من الاجذار والعدد الى مثل ما رددت اليه المال »(77) . وكذلك قوله بالنسبة للمعادلة :

أ س2 + جـ = ب س : « وكل ما اتاك من مالين او اكثر او اقل فاردده الى مال واحد كنحو ما بينت لك في الباب الاول »(78) . ويطبق المبدأ نفسه بالنسبة للمعادلة : ب س + جـ = س2 « وكل ما كان اكثر من مال او اقل فاردده الى مال واحــد »(79) . اما السبب المنطقي في اصراره على رد الاموال ما زاد منها وما نقص الى مال واحد ، فيرجع في الحقيقة الى طريقة الحل التي توصل اليهـا الخوارزمي والتي تعتمد من حيث الاساس على تصورات هندسية وعلى خصائص بعض الاشكال من الهندسة المستوية ، وبخاصــة المربع والمستطيل وسنجد بعد قليل مذهبــه الهندسي في الحـل ، ولكننا في الوقت نفسه لابد ان نميز بين التطبيقات الهندسية للجبر والاساس الهندسي لاشتقاق القانون الجبري ، فبينما الاول مجرد تعبير هندسي عن معادلة جبرية معينة ، فان الثاني طريقة للوصول الى حل تشترك فيه معادلات ذات نمط معين ، وفي الحالتين نجـد اسلوبا مبتكرا ورائدا في الربط بين الجبر والهندسة وهـو الربط

الضروري لميلاد الهندسية التحليلية .

يقسم الخوارزمي الاشكال الستة الرئيسة من المعادلات الى مجموعتين :ـ

مجموعة تضم ثلاثة الاشكال الاولى لا تنصف فيها الاجذار .
مجموعة اخرى تضم ثلاثة الاشكال الاخيرة فيها تنصف الاجذار . ويسوق الامثلة المتنوعة على الاشكال الستة وقصده من ذلك التوضيح وتقريب الحل الى الفهم وسهولة الاستعمال عند الحاجة وفي ذلك يذكر صراحة « ثم اتبعت ذلك من المسائل بما يقرب من الفهم وتخف فيه المؤنة وتسهل فيه الدلالة ان شاء الله تعالى »(80) ولكنه بعد التوضيح بالامثلة يشير بوضوح الى السبب الذي ادى الى تنصيف الاجذار عند حل المعادلات من المجموعة الثانية فيقول : « فاما ما تحتاج فيه الى تنصيف الاجذار في الثلاثة الابواب الباقية فقد وصفته بابواب صحيحة وصيرت لكل باب منها صورة يستدل منها على العلة في التنصيف »(81) ، وفي هذاالقول ما يشير الى اهتمام الخوارزمي بالاستدلال لمعرفة العلة ، هو استدلال في الحدود الهندسية استخدمه في عدة مواضع من الكتاب مما يثبت ان الاساس الهندسي كان وراء حلوله الجبرية ، وان التماسه المستمر بالاسقاط الهندسي يدل على مدى تعلقه بالحل الهندسي لمشكلات جبرية ، فهو لم يكتف باستخدام الحل الهندسي للمجموعة الثانية من المعادلات التي تنصف فيها الاجذار ، بل برهن كذلك على الجمع والطرح لمقادير جبرية مثل :

$$(\sqrt{200} - 10) + (20 - \sqrt{200})$$ (82)

$$(\sqrt{200} - 10) - (20 - \sqrt{200})$$ (83)

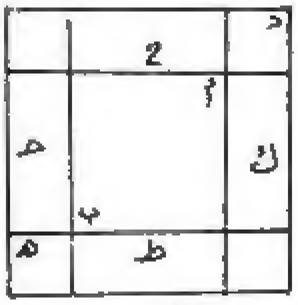
وطريقته العامة في الاسقاط الهندسي وايجاد الحل هي في التعبير عن المشكلة الجبرية هندسيا ، ثم التماس الطريق الابسط لبيان الحل وتعميمه ، بحيث يأخذ الحل في النهاية صورة حل جبرية . ومن ابرز الامثلة على اعتماد الخوارزمي لهذه الطريقة في الاشتقاق وايجاد الحلول ، طريقته في اشتقاق قاعدة الدستور ، مع الاحتفاظ بالطريقة ذاتها في صياغة القاعدة بصورتها الجبرية والمثال الذي يسوقه هو المعادلة :ـ

$$س^2 + 10 س = 39$$

وللتعبير عن المعادلة هندسيا يفترض الخوارزمي سطحا مربعا مجهول الاضلاع تكون مساحته $س^2$ ، ثم يلجأ الى التعبير عن 10 س هندسيا بتكوين اربعة مستطيلات على اضلاع المربع وعلى اساس

ان طول الضلع الاخر من كل مستطيل يساوي $\frac{10}{4} = 2\frac{2}{2}$

فتكون مساحة المستطيلات الاربعة 10 س وبناء على ذلك تكون المعادلة قد اخذت صورتها الهندسية على النحو الآتي :ـ



مساحة المربع ا ب + مجموع مساحة المستطيلات الاربعة : ك ، ح ، ج ، ط تعادل طريقة الحل(84) :ـ

ان طول ضلع المربعات القائمة في الزوايا $\frac{10}{4}$ ، وبتعبير جبري $\frac{ب}{4}$ ، فمساحة كل مربع صغير اذاً = $(\frac{10}{4})^2$ او $(\frac{ب}{4})^2$ ، مجموع مساحات المربعات الصغيرة :ـ

$$4 \times (\frac{10}{4})^2 = 4 \times \frac{100}{16} = (\frac{10}{2})^2 = 25$$

وبتعبير جبري :ـ

$$4 \times (\frac{ب}{4})^2 = (\frac{ب}{2})^2$$

مساحة المربع د هـ = مجموع مساحة المربعات الصغيرة + مساحة المربع الوسطي ا ب + مجموع مساحة المستطيلات الاربعة .

لما كان ضلع المربع المجهول س ، فان ضلع المربع الكبير د هـ = $س + \frac{10}{2}$

$$(س + \frac{10}{2})^2 = (\frac{10}{2})^2 + 39$$

$$س + \frac{10}{2} = \sqrt{(\frac{10}{2})^2 + 39}$$

$$س = \sqrt{(\frac{10}{2})^2 + 39} - \frac{10}{2}$$

$$س = 25 + 39 - 5$$

$$س = 8 - 5$$

$$س = 3$$

وبالطريقة الجبرية :ـ

$$\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2}\right)^2 = \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{2}\right)^2 + \text{حـ}}$$

$$\text{س} + \frac{\text{ب}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{2}\right)^2 + \text{حـ}}$$

$$\text{س} = \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{2}\right)^2 + \text{جـ}} - \frac{\text{ب}}{2}$$

وبطريقة هندسية مبتكرة يحصل الخوارزمي كذلك على علة تنصيف الاجذار والحل للمعادلات الاخرى بالدستور :ـ

$\text{ا س}^2 + \text{حـ} = \text{ب س}$ ودستور حلها :ـ

$$\text{س} = \frac{\text{ب}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{2}\right)^2 - \text{حـ}}$$

$\text{ب س} + \text{حـ} = \text{ا س}^2$ ودستور حلها :ـ

$$\text{س} = \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{2}\right)^2 + \text{حـ}} + \frac{\text{ب}}{2}$$

ان الملاحظة الرياضية التي يقع عليها الباحث في الجبر والمقابلة هي تفادي الخوارزمي للقيمة السالبة وعـــدم ذكره لها ، ففي المثـال السادس للمعادلة $\text{س}^2 = 12\,\text{س} + 288$ يذكر القيمة الموجبة ل س وهي 24 ، بينما يهمل ذكر القيمة الاخرى وهي سالبة ل س = − 12 ، ولكن ذلك لا يعني مطلقا انه لم يعرف القيمة السالبــة ل س ، فهو يذكر الزيادة والنقصان في التثبت من صحة الحـــل للمعادلة ، ولا يفوته ان يذكر قيمتين لحل المعادلة في حالة كونهما موجبتين مثال ذلك ما حدث بالنسبة للمعادلة $\text{س}^2 + 21 = 10\text{س}$ حيث يقول « ان تنصف الاجذار فتكون خمسة فاضربها في مثلهـا تكون خمسة وعشرين فانقص منها الواحد والعشرين والتي ذكر انها مع المال فيبقى اربعة فخذ جذرها وهو اثنان فانقصـــه من نصف الاجذار وهو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة ، وان شئت فزد الجذر على نصف الاجذار فتكون سبعة وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة واربعون »(85) .

يظهر من النص بوضوح أن للمعادلة السابق ذكرها قيمتين موجبتين هما ثلاثة وسبعة .

ولقد ادرك الخوارزمي مسألة التثبت من الحل بعد الحصـــول على النتيجة او اكتشاف قيمة المجهول ، وهذه الطريقة اصبحت معروفة في المنطق الذي يعـــرف بمنطق الحـــل او المنطق الهورسيتكي Heuristic Logic ونص الخوارزمي يشير الى مسالـة التثبت بوضوح ، حيث يقول « فاذا وردت عليك مسئلة تخرجك الى هذا الباب فامتحن صوابها بالزيادة فان لم تكن فهي بالنقصان لا محالة ، وهذا الباب يعمل بالزيادة والنقصان جميعا ... »(86) .

واخيرا .. لابد ان نذكر موقفه من المقادير التخيلية التي قد تظهر عند حل المعادلات ، اذ يرى أن المسئلة تكون مستحيلة اذا ما اظهرت نتيجة الحل مقدارا تخيليا مثل $\sqrt{-3}$ ، فيقول « واعلم انك اذا نصفت الاجذار في هذا الباب وضربتها في مثلها فكان مبلغ ذلك اقل من الدراهم التي مـع المـال فالمسئلة مستحيلـة »(87) . ويمكن التعبير عن هذا النص جبريا بالشكل الآتي :ـ

$$\text{س} = \frac{\text{ب}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{2}\right)^2 - \text{حـ}}$$

اذا كانت القيمة العددية ل $\left(\frac{\text{ب}}{2}\right)^2$ اقل من حـ فان النتيجـــة

تكون كما يأتي :ـ

$$\text{س} = \frac{\text{ب}}{2} \pm \quad - \text{م}$$

وفي ذلك يعتبر الخوارزمي المسئلة مستحيلة ، وقد اشار المحققان لكتاب الجبر والمقابلة الى ذلك بالقول « تنبه الخوارزمي للحالة التي يستحيل فيها ايجاد قيمة حقيقية للمجهول فقـال ان المسئلة تكون في هذه الحالة (مستحيلة) وقـــد بقي هـــذا اسمها بين علمـــاء الرياضيات الى اواخـــر القرن الثامن عشـــر عندما بدأ البحث في الكميـــات التخيليـــة على ايـدي كاسبارفســل وجـان روبـير ارجان »(88) .

الهوامش

١ ـ يستخـــدم رســـل ووايتهيـــد في كتابهما اصـــول الرياضيـــات Principia Mathematica مفهوم (دالة القضية) على اساس انها صيغة فيها متغير واحد على الاقل ، تتحـــول الى قضية تحتمل الصدق أو الكذب بعد اعطاء قيم لمتغيراتها .

٢ ـ وردت هذه الملاحظات مكتوبة كذلك في محاضراته :

Hans. Kermes. , Einfuhrung en die mathema--tischen Logik P. 77 (Munster /Westf. 1957)

٣ ـ ابن النديم : الفهرست ص ٢٩٧ . (مطبعة الاستقامة بالقاهرة) .

٤ ـ القفطي ، جمال الدين ، كتاب اخبار العلماء باخبار الحكمـــاء ص ١٨٧ ـ ١٨٨ (مطبعة السعادة بجوار محافظة مصر) .

٥ ـ القفطي : المصدر السابق ص ١٧٥ .

٦ ـ ابن ابي اصيبعة ، عيون الانباء في طبقات الاطبـــاء ص 283 (شرح وتحقيق نزار رضا ـ دار مكتبة الحياة ـ بيروت) .

٧ ـ القفطي : المصدر السابق ص ١٨٧ .

٨ ـ القفطي : المصدر السابق ص ١٧٧ ـ ١٧٨ .

9. Bell, E. T., The Development of Mathema-tics P. 99 (Second Edition : New York. London. 1945)

١٠ـ الدوميلي : العلم عند العرب ص ١٦٠ . (ترجمة : د. عبدالحليم النجار و د. محمد يوسف موسى دار القلم ١٩٦٢) .

11. Lukasiewicz, J., Aristotles Syllogistic (Second Edition. Oxford. 1957).

١٢ـ للمنطق صلة وثيقة باللغة والرياضيات ، لان التفكير المنطقي يفترض لغة للتعبير ، وقد تكون لغة الحياة اليومية او لغة رياضية ، وعلى الرغم من قلة المعلومات المتوفرة عن العلوم في وادي الرافدين ووادي النيل قبل بزوغ الحضارة اليونانية الا ان ما تركوه يبرهن على استخدامهم لقوانين منطقية في الهندسة والجبر والفلك ، وفي حدود اليونان ظهر قبل ارسطو عدد من الفلاسفة الذين صاغوا قوانين منطقية امثال زينون الايلي وبارمنيدس وسقراط وافلاطون .

١٣ـ لقد عرف المصريون القدماء كثيرا من الحقائق الهندسية وعرف البابليون كذلك حقائق هندسية كان من ابرزها القضية المعروفة بنظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية ، وتنقلت المعرفة الهندسية من مصر وبابل الى اليونان ، وهو انتقال من استخدام الهندسة في الحياة الى التأمل فيها والنظر في قضاياها .

١٤ـ يحتوي الاورغانون على كتاب المقولات Categoriae وكتاب العبارة De Imterpretatione والتحليلات الاولى Analytica Priora والتحليلات الثانية Analytica Posteriora والمواضيع وغير ذلك ، فتناول في المقولات موضوع الالفاظ ، بينما اهتم في العبارة بالقضايا ، واقام نظريته القياسية في التحليلات الاولى وثبت قواعد عامة للعلم البرهاني وشروطه وعناصره في التحليلات الثانية ، وناقش نظرية التعريف في كتاب المواضيع (انظر كتابي :

نظرية ارسطو المنطقية . بغداد 1964) .

15ـ تناول جورج بول موضوع ارسطو من زاوية الجبر المنطقي في كتابه : بحث في قوانين الفكر .

Boole, G., The Laws of Thought : An Investi-gation of (Dover Publications, Inc. New York)

وتناوله جوتلوب فريجه من زاوية حساب دالات القضايا في كتابه اللغة الرمزية .

Frege, C. Begriffsshrift (Halle. 1976)

كما تناوله حديثا عدد من المناطقة منهم داڤيد هلبرت واكرمان في كتابهما « الخصائص الاساسية للمنطق النظري » .

Hilbert, D., & Ackermann, W. Grundzuge der Theoretischen Logik P44 - 48 (Dritte Auflage. Springer. 1949)

16ـ اصبح للطريقة الاستدلالية منذ كتاب اقليدس تأثيرا كبيرا على العلوم والفلسفة ، فكتاب غاليلو « العلمان الجديدان » وكتاب نيوتن المبادىء الرياضية للفلسفة الطبيعية وكتاب الاخلاق لسبينوزا تشير كلها الى اهمية الطريقة في بناء المعرفة العلمية والفلسفية ، ولا تزال الدراسات الفيزياوية النظرية وعلوم اخرى والرياضيات تاخذ بالطريقة البديهية (انظر بحثي « الطريقة البديهية في المنطق والرياضيات والفيزياء النظرية ـ مجلة كلية الاداب ـ 1977) .

17ـ تعتبر مشكلة مصادرة التوازي جوهر البحث الذي ادى الى ظهور الهندسات غير الاقليدية ، حيث كانت جهود علماء الرياضيات متجهة الى البرهان عليها بافتراض نقيضها لعل المرء يحصل عندئذ على تناقض في الهندسة ، ولكن ظهر ان الهندسات التي لا تاخذ بها وتستبدلها ببديهية تفترض عددا لا متناه من المتوازيات أو ببديهية لا تفترض اي متواز هي هندسات متينة خالية من التناقض .

18ـ الخيام ، عمر : مصادرات اقليدس ص 6 تحقيق د. عبدالحميد صبرة (المعارف بالاسكندرية 1961) .

19ـ الطوسي ، نصير الدين : الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية ص 4 (الدكن . حيدر آباد) .

20ـ حقق هلبرت ذلك في كتابه « اسس علم الهندسة » سنة 1889

Hilbert, D., Grund Lagen der Geometrie 1889

21ـ انظر لمعرفة جملة افكار فيثاغورس الرياضية في كتاب بيل « رجال الرياضيات » .

Bell, E. T, Men of Mathematics vol. I. P. 20 (A Pelican book 1953)

22ـ من أجل معرفة الجبر البابلي والعلوم القديمة انظر كتاب نيوجيبور (العلوم المضبوطة في الماضي القديم) .

Neugebauer, O., The Exact Sciences In Antiguity. (Princeton, 1952, Brown, 1957, Torchbook 1962)

23ـ « لقد اسس الاسكندر الاكبر مدينة الاسكندرية سنة 323 ق. م . في الموقع الذي كانت تشغله من قبل القرية المصرية راقودة وقد ظل هذا الاسم علما على الاسكندرية في اللغة المصرية القبطية الدارجة . وعندما انقسمت امبراطورية الاسكندر بين قواده كانت مصر من نصيب بطليموس سوتير (Ptolemy Soter) وظلت في ايدي اسرة البطالمة الى ان انتقلت الى الرومان واتخذ بطليموس سوتير الاسكندرية قاعدة للملكة وبذل مجهودات طائلة ليجعل منها موئلا للثقافة والعلوم اليونانية ، وانشأ فيها الاكاديمية التي اصبحت ولما يمضي على انشائها وقت طويل بمثابة جامعة يونانية تباري المدارس الاثينية القديمة » .

د. لاس اوليري : علوم العرب وسبل انتقالها الى العرب ص 23 ترجمة أ. وهيب كامل (الالف كتاب (395) 1962) .

24ـ تذكر كتب التراجم والسير فضل ديوفنطس في صناعة الجبر وقد ذكره ابن النديم في الفهرست (ص 390) بقوله : اليوناني الاسكندراني وله من الكتب : كتاب في صناعة الجبر ويذكره القفطي في كتاب اخبار العلماء باخبار الحكماء (ص 126) بقوله اليوناني الاسكندراني فاضل

كامل مشهور في وقته وتصنيفه وهو صناعة الجبر كتاب مشهور مذكور خرج الى العربية وعليه عمل اهل هذه الصناعة واذا تبحره الناظر راى بحرا في هذا النوع ، ويذكره ابن ابي اصيبعة في كتابه عيون الانبـــاء في طبقات الاطباء (330) في ذكره لمؤلفـــات قسطا بن لوقا البعلبكي فيقول ان لـــه (كتاب في ترجمـــة ديوفنطس في الجبـــر والمقابلة) .

25ـ قام رشدي راشد بتحقيق كتاب ديوفنطس الذي ترجمه قسطا بن لوقا صناعة الجبر لديوفنطس ـ التراث العلمي العربي (1) ـ 1975 .

26ـ كتاب الجبر والمقابلـــة لمحمـــد بن موسى الخوارزمي (دار الكاتب العربي ـ مصر 1968) وتفضل مشكورا كل من الدكتور علي مصطفى مشرفه والدكتور محمد مرسي احمد فوضع مقدمة مع تعليقات رياضية هامة في حاشية صفحات الكتاب يسرت على القارىء حل كثير مـــن المعضلات التي اثرها صياغة المفاهيم والمعادلات والحلول لغـــويا ، وذلك عن طريق استخدام لغة الجبر الحديث .

27ـ امتاز الفكر اليوناني بالاستدلالية الصورية وركز افلاطون وارسطـــو اهتمامهم حول تثبيت الطريقة الاستدلالية في بناء العلم ولم تحظ الطريقة الاستقرائية التجريبية باهتمامهم وتجســم الفكر اليوناني في اثبات جدوى الطريقة الاستدلالية ولكنه لم يفلح في الحساب لعـــدم تطور هذا العلم بما فيه الكفاية .

28ـ على الرغم من انتقال العلم اليوناني والمصري الى دائرة معارف مدرسة الاسكندريـــة الا ان اهتمام البحث تركـــز من جديد حول الطريقـــة الاستدلالية في العلم الرياضي مع اهتمام بعض العلمـــاء بالتجـــارب والاجهزة على نطاق ضيق .

29ـ منطق ارسطو (التحليلات الثانية) ص 318 .

Am. Post. A 2,72 b

(تحقيق الدكتور عبدالرحمن بدوي) .

30. Bochenski, I. M., Formale Logik P. 53 (Freiburg Munchen 1956)

31ـ خليل ، ياسين : نظرية ارسطو المنطقية .

32ـ 33ـ 34ـ 35ـ 36ـ 37ـ 38ـ الخوارزمي المصدر السابق

39. Nesselmann, G.H.L., Algebra der Griechen (Berlin 1842)

40ـ الدوميلي المصدر السابق ص 156 .

41ـ الكاتب الخوارزمي ابن عبدالله محمد بن احمد بن يوسف ـ مفاتيح العلوم ص 116 (ادارة الطباعة المنيرية بمصر 1342 هـ) .

42ـ يرى الدكتور عبدالحليم منتصر ان العرب استعملوا الرموز في الاعمال الرياضية فالمعادلة 5 س2 = 12 س + 54 كانت تكتب 5 ل 12 ش و 54 .

خمسة تشير الى المال و ل تشير الى المعدل و ش تشير الى الشيء ، والعطف (و) يشير الى الزيادة .

اثر العرب والاسلام في النهضة الاوربية ص 220 (شارك في كتابـــة فصوله عدد من الباحثين : الهيئة المصريـــة العامـــة 1970 . ويرى الاوربيون ان الفضـــل يعـــود الى عالم الرياضيات الفرنســـي (Fransois Viete) 1540 ـ 1603 في استعمال الرموز العامة للدلالة على الاعداد فهو بذلك مؤســـس التدوين الرمزي الحـــديث في الجبر .

43ـ الخوارزمي : المصدر السابق ص 16 .

44ـ الكاتب الخوارزمي : المصدر السابق ص 115 .

45ـ الخوارزمي : المصدر السابق ص 16 .

46. Hunke, S., Allahs Sonne uber dem Abend land P. 47.

47ـ يقصد بالالغوريثم في الرياضة الحديثة مجموعة العمليات الخاضعـــة لاجراء منتظم لحـــل مشـــكلات ذات نمط معين .. وانطبق الاسم في العصور الوسطى على الحساب الذي يستخدم الارقام الهنديـــة ـ العربية .

Encyclopedia Britanica P. 629- A. Antarah.

48ـ ابن النديم : المصدر السابق ص 70 .

49ـ نصار ، حسين : المعجم العربي : نشأته وتطوره ص 221 .

50. Bochenski, I. M. OP. cit. P318

51. Ibid., P. 318 - 320

52. Emcyclopedia Britanice P. 612 (A. Antarah I)

53ـ 54ـ 55ـ 56ـ 57ـ 58ـ 59ـ 60ـ 61ـ 62ـ المصدر السابق

63ـ استخدم الخوارزمي هذه القاعدة وان لم ينص عليها صراحة .

64ـ 65ـ 66ـ 67ـ 68ـ 69ـ 70ـ 71ـ 72ـ 73ـ 74ـ 75ـ 76ـ

77ـ 78ـ 79ـ 80ـ 81ـ المصدر نفسه

82ـ استخدمت الطريقة الهندسية في حل المعادلة :

ا س2 + حـ = ب س ، ص 23 ـ 24 والمعادلة

ب س + حـ = ا س2 : ص 25 ـ 26 .

واستخدمت كذلك بالنسبة للمعادلة

(√200 ـ 10) + (20 ـ √200) ص 32

83ـ المصدر نفسه ص 33 .

84ـ انظر بحث الاستاذ خالد السامرائي (الرياضيات عند العـــرب) ص 30 ـ 31 (مجلة معهد المدرسين العالي 1964) .

85ـ الخوارزمي : المصدر السابق ص 20 .

86ـ المصدر نفسه ص 20 .

87ـ المصدر نفسه ص 20 ـ 21 .

88ـ المصدر نفسه ص 21 .